

Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 6. Übungszettel (19. November 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 26. November.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen (“Quickies”) enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Wann gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ für das elektrische Feld?

Q2: Wann kann das elektrische Feld $\vec{E}$ eindeutig durch ein elektrisches Potenzial U ausgedrückt werden? Wie kann ich in diesem Fall $U(\vec{r})$ aus $\vec{E}(\vec{r})$ berechnen?

Q3: Was ist das elektrische Potenzial einer ruhenden Punktladung?

1.2 Magnetfeld einer runden Leiterschleife

In dieser Aufgabe berechnen wir das Magnetfeld über dem Zentrum einer runden Leiterschleife (Radius R); wir werden dann über ∞ viele dieser Schleifen integrieren, um das Magnetfeld im Zentrum einer ∞ langen zylindrischen Spule zu berechnen.

1. Für eine eindimensionale Stromdichte, d.h. einen Strom I durch einen Leiter, wird das Bio-Savart Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{l})}{|\vec{r} - \vec{l}|^3}. \quad (1)$$

Das eindimensionale Integral geht hier über den Leiter, und $d\vec{l}$ zeigt entlang des Leiters, in die Richtung, in der der Strom fließt. Wir legen unsere Leiterschleife in die

(x, y) Ebene, mit Zentrum im Ursprung. Berechnen Sie das Feld $\vec{B}(\vec{r})$ bei $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$,

d.h. über (oder unter) dem Mittelpunkt der Schleife. *Hinweis:* Benutzen Sie Zylinderkoordinaten, sodass $d\vec{l} = R\vec{e}_\phi d\phi$, wobei $\vec{e}_\phi$ der tangentielle Einheitsvektor in der (x, y) Ebene ist. Sie sollten für diesen Ort $\vec{r}$ finden, dass $B_x(\vec{r}) = B_y(\vec{r}) = 0$, $B_z(\vec{r}) \neq 0$.

2. Zeigen Sie, dass das Nahfeld ($z \ll R$) unabhängig von z ist, und $\propto 1/R$.

3. Zeigen Sie, dass das Fernfeld ($z \gg R$) $\propto R^2/z^3$ ist, d.h. das Magnetfeld fällt wie die *dritte* Potenz des Abstandes ab. *Hinweis:* Alle statischen Magnetfelder, die durch eine örtlich begrenzte Konfiguration von Strömen verursacht werden, fallen mit mindestens der dritten Potenz des Abstandes von dieser Konfiguration ab, sobald der Abstand viel größer als die Ausdehnung dieser Konfiguration ist.
4. Zeigen Sie, dass das Magnetfeld im Zentrum einer unendlichen lange zylindrischen Spule berechnet werden kann als

$$\vec{B}_{\text{Spule}} = n \int_{-\infty}^{\infty} dz \vec{B}_{\text{Schleife}}(z), \quad (2)$$

wobei n die Windungsdichte ist (d.h. auf dem Wegstück dz befinden sich $dN = ndz$ Windungen), und $\vec{B}_{\text{Schleife}}$ ist das zuvor berechnete Feld einer einzelnen Leiterschleife.

5. Berechnen Sie das Integral in Gl.(2) explizit. *Hinweis:* Diese Rechnung sollte (natürlich) das Ergebnis (2.12) aus der Vorlesung reproduzieren. Die Stammfunktion von $f(z) = 1/(z^2 + R^2)^{3/2}$ ist $F(z) = (z/R^2)/\sqrt{z^2 + R^2}$.

2 Hausaufgaben

2.1 Magnetfeld einer quadratischen Leiterschleife

Wir betrachten eine quadratische Leiterschleife der Kantenlänge a . Wir legen die Schleife in die (x, y) Ebene, sodass der Ursprung im Mittelpunkt der Schleife liegt und die Seiten der Schleife parallel zur x - bzw. y -Achse sind. Zu berechnen ist das Magnetfeld am Punkt

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, über (oder unter) dem Zentrum der Schleife, mittels des Bio-Savart Gesetzes.

1. Das Integral über die Schleife besteht offensichtlich aus vier Teilstücken, wobei jeweils zwei parallel zur x - und zur y -Achse sind. Berechnen Sie $(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{l}$ für jedes der vier Teilstücke. [2P]
2. Nun berechnen Sie $\vec{B}(\vec{r})$. *Hinweis:* $B_x = B_y = 0$ nach Summation über die vier Teilstücke, während man für B_z viermal den gleichen Beitrag bekommt. [3P]
3. Zeigen Sie, dass das Nahfeld (bei $z \ll a/2$) unabhängig von z ist. [1P]
4. Zeigen Sie, dass das Fernfeld (bei $z \gg a/2$) identisch dem einer runden Leiterschleife ist, wenn man es durch die von der Schleife eingeschlossene Fläche $\mathcal{A}$ ausdrückt. [2P]

2.2 Multipol-Entwicklung

Die Multipol-Entwicklung wird benutzt, um das Fernfeld einer endlichen, statischen aber ansonsten beliebigen Ladungsverteilung zu berechnen, wobei die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ vorgegeben ist; “endlich” heisst hier, dass $\rho(\vec{r}) = 0 \ \forall \ |\vec{r}| > r_{\max}$ gilt. Wir berechnen das Potenzial $U(\vec{R})$ am Abstand $R \equiv |\vec{R}| \gg r_{\max}$.

1. Aus dem Coulomb Potenzial und dem Superpositionsprinzip folgt

$$U(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|}. \quad (3)$$

Die Multipol-Entwicklung beruht auf einer Entwicklung von $1/|\vec{R} - \vec{r}|$ für $|\vec{R}| \gg |\vec{r}|$, was für $|\vec{R}| \gg r_{\max}$ immer gegeben ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{|\vec{r}|}{|\vec{R}|} \right)^l P_l(\cos \theta), \quad (4)$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{R}$ und $\vec{r}$ ist und P_l ein Polynom vom Grade l . *Hinweis:* Schreiben Sie $|\vec{R} - \vec{r}|$ als Quadratwurzel, wobei der führende Term unter der Wurzel $|\vec{R}|^2$ ist. Das Ergebnis folgt durch Taylor-Entwicklung, sobald $|\vec{R}|$ vor die Wurzel gezogen wird. Die Form dieser Polynome müssen Sie hier nicht bestimmen. **[3P]**

2. Die P_l heißen Legendre-Polynome. Zeigen Sie durch explizite Entwicklung von $1/|\vec{R} - \vec{r}|$, dass $P_0 = 1$; $P_1(z) = z$ und $P_2(z) = (3z^2 - 1)/2$. **[2P]**
3. Zeigen Sie, dass das Potenzial geschrieben werden kann als

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_{l=0}^{\infty} \int d^3r \left(\frac{|\vec{r}|}{|\vec{R}|} \right)^l P_l(\cos \theta) \rho(\vec{r}). \quad (5)$$

Offensichtlich ist das Verhalten bei großem $|\vec{R}|$ hauptsächlich bestimmt durch das kleinste nicht verschwindende l . Was bedeutet es, wenn der “Monopol Term”, mit $l = 0$, verschwindet? **[2P]**

4. Zeigen Sie, dass der “Dipol Term”, mit $l = 1$, geschrieben werden kann als

$$V_{\text{Dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R} \cdot \vec{p}}{|\vec{R}|^3}, \quad (6)$$

wobei das elektrische Dipolmoment gegeben ist durch

$$\vec{p} = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}). \quad (7)$$

Was ist die einfachste Anordnung von Punktladungen mit verschwindendem Monopol-Term aber endlichem Dipol-Term? **[3P]**