Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 7. Übungszettel (26. November 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 3. Dezember.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Wann gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ für das magnetische Feld?

Q2: Wann kann das magnetische Feld $\vec{B}$ eindeutig durch ein Vektorpotenzial $\vec{A}$ ausgedrückt werden? Ist $\vec{A}$ ein echter oder ein Pseudovektor?

Q3: Was ist die Energiedichte, die von einem elektrischen Feld $\vec{E}$ getragen wird?

1.2 Magnetischer Dipol

In dieser Aufgabe berechnen wir das Magnetfeld eines Dipols, betrachten die Kraft, die dieses Feld auf bewegte Ladungen ausübt, und wenden dies auf das Magnetfeld der Erde an.

1. Ein magnetischer Dipol ist beschrieben durch das Vektorpotenzial

$$\vec{A}_{\mathrm{Dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{l}|^3} \,. \tag{1}$$

   $\vec{m}$ ist das magnetische Dipolmoment, und der Ursprung des Koordinatensystems ist hier im Zentrum des Dipols. Berechnen Sie das entsprechende Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$.
   Hinweis: Legen Sie die $z-$Achse in Richtung von $\vec{m}$, sodass $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.

2. Zeigen Sie, dass die Stärke des Magnetfelds nicht vom Winkel ϕ in Kugel– oder Zylinderkoordinaten abhängt, d.h. $|\vec{B}|$ hängt nur von z und $\sqrt{x^2 + y^2}$ ab. Wieso folgt dies aus Symmetrie-Argumenten? Und warum erlauben diese Argumente nicht den Schluss, das $|\vec{B}|$ nur nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängt?

3. Das Magnetfeld der Erde ist näherungsweise ein Dipolfeld, mit Stärke $|\vec{B}| = B_E \simeq 3 \cdot 10^{-5}$ T in der Nähe des Äquators, d.h. bei $z = 0$ und $r = R_E \simeq 6.5 \cdot 10^6$ m. Drücken Sie $\vec{B}$ durch B_E und dimensionlose Größen aus.

4. Berechnen Sie explizit die Kraft, die dieses Magnetfeld auf ein Teilchen mit Ladung Q und Geschwindigkeit $\vec{v}$ ausübt.

5. Berechnen Sie den Larmor–Radius für ein Teilchen der Ladung $Q = e$ (z.B. ein Proton) in der Nähe des Äquators. Welchen Impuls muss dieses Teilchen haben, damit der Larmor–Radius dem Erdradius R_E entspricht? *Hinweis:* Teilchen mit (viel) kleinerer Energie können das $B-$Feld der Erde in der Regel nicht durchdringen, d.h. werden abgelenkt; Teilchen mit (viel) größerer Energie werden auf die Atmosphäre der Erde treffen.

6. Betrachten Sie ein Teilchen, bei dem ursprünglich $y(t_0) = v_y(t_0) = 0$ ist. Zeigen Sie, dass dann die Projektion der Bahnkurve auf die (x, z) Ebene (wie in den Abbildungen unten gezeigt) unabhängig von dem Vorzeichen der Ladung des Teilchens ist, d.h. die Abbildungen gelten sowohl für positiv als auch für negativ geladene Teilchen.

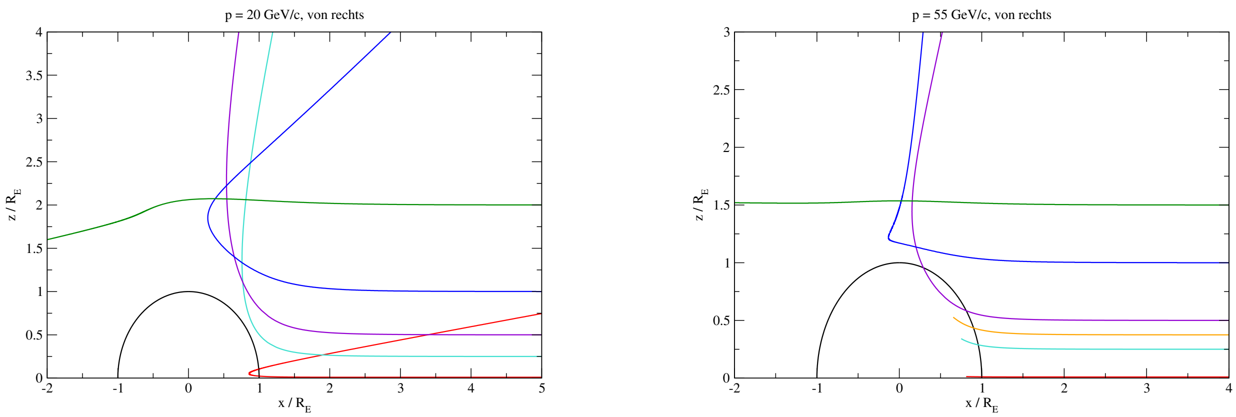

Abbildung 1: Trajektorien von Teilchen, die von rechts einfallen, d.h. mit $v_z(t_0) = 0$, $v_x(t_0) < 0$, mit Impuls $|\vec{p}| = 20$ GeV$/c$ (links) bzw. 55 GeV$/c$ (rechts). Der Halbkreis zentriert auf den Ursprung ist die (kugelförmige) Erde. Beachten Sie, dass die Projektion auf die (x, z) Ebene gezeigt ist; wenn $|y|$ hinreichend groß ist kann die Trajektorie deshalb teilweise innerhalb der Halbkreises liegen, ohne die Erde zu treffen. In der Tat dringt keine der Trajektorien mit $|\vec{p}| = 20$ GeV$/c$ bis zur Erdoberfläche vor; im Unterschied dazu enden die drei untersten Trajektorien mit $|\vec{p}| = 55$ GeV$/c$ auf der Erde.

Wie oben angedeutet, lenkt das Magnetfeld der Erde geladene Teilchen mit nicht zu hoher Energie von der Erde weg; das Magnetfeld reduziert somit den Fluss ionisierender Teilchen (insbesondere von Myonen, die durch die kosmische Strahlung in der Atmosphäre produziert werden) auf der Erdoberfläche. Das ist in den folgenden Abbildungen illustriert. In allen Fällen wurde $|Q| = e$ angenommen, mit Anfangsbedinungen $y(t_0) = v_y(t_0) = 0$.

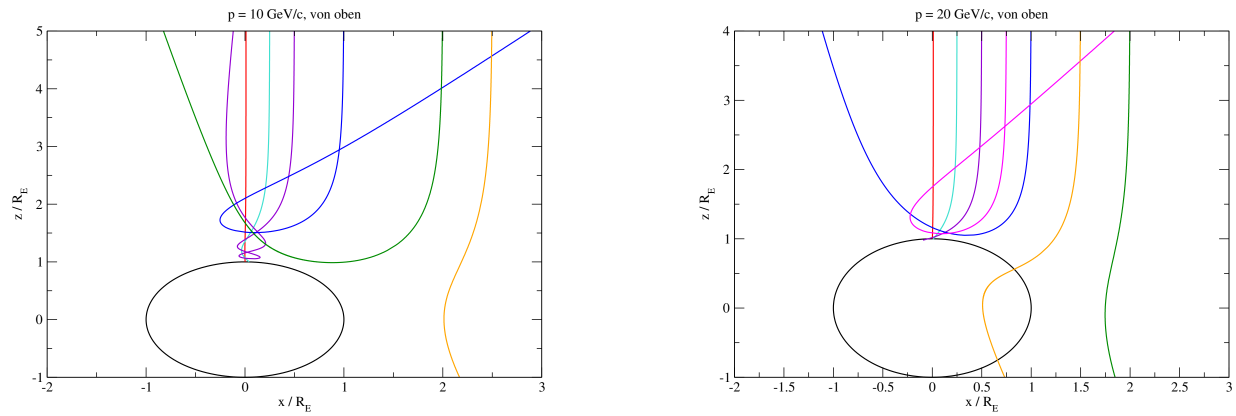

Abbildung 2: Trajektorien von Teilchen, die von oben einfallen, d.h. mit $v_x(t_0) = 0,\ v_z(t_0) < 0$, mit Impuls $|\vec{p}| = 10$ GeV/c (links) bzw. 20 GeV/c (rechts). Der Kreis zentriert auf den Ursprung ist die (kugelförmige) Erde. Teilchen, die entlang der magnetischen Achse, d.h. entlang der $z-$Achse, fliegen, können selbst bei kleinen Energien zur Erde durchdringen. Bei gleicher Einfallsrichtung aber paralleler Versetzung zur $z-$Achse werden die Teilchen im Richtung des Pols abgelenkt; je nach ursprünglichem Abstand von der $z-$Achse und Impuls treffen sie die Erde nahe dem Pol, werden reflektiert (wie die lila Trajektorie links), oder fliegen an der Erde vorbei (wie die orange Trajektorie rechts).

Insgesamt zeigt sich, dass das Magnetfeld in der Nähe des Äquators besser schützt als in der Nähe der Pole.

Hier wurde jeweils die Trajektorie eines einzelnen Teilchens gezeigt. Bei starken "Sonnensturm" wird eine Plasmawolke mit sehr vielen, aber relativ niederenergetischen Teilchen von der Sonne ausgestoßen; manchmal treffen solche Wolken auf die Erde. Diese vielen Teilchen produzieren einen nicht unerheblichen Strom, und somit ihr eigenes Magnetfeld, was die Rechnung erheblich komplizierter macht. Auch solche Plasmawolken werden aber in der Regel in Richtung der Pole abgelenkt. Einige Teilchen können dann die Atmosphäre treffen, und Moleküle in der Atmosphäre anregen; das ist der Ursprung des Polarlichts.

Die Trajektorien wurden durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Runge-Kutta Algorithmus berechnet.

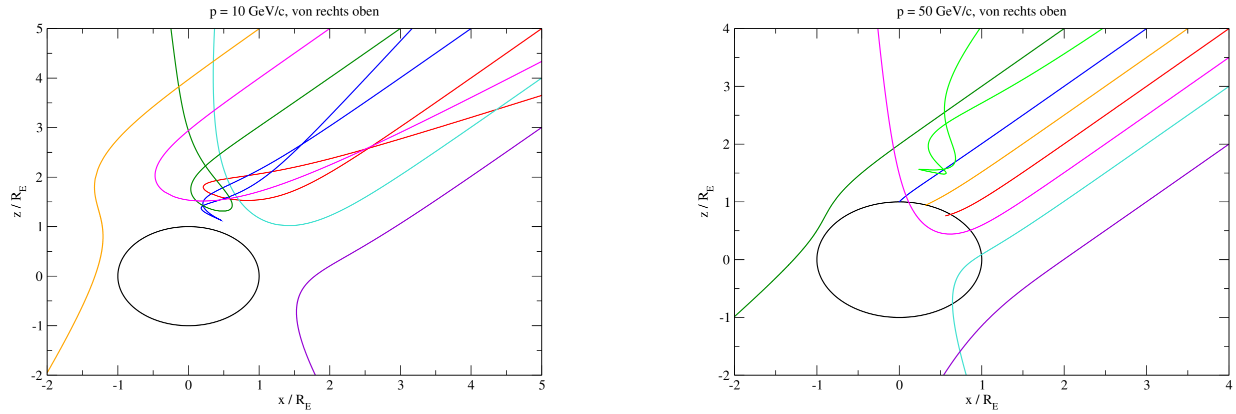

Abbildung 3: Trajektorien von Teilchen, die von rechts oben einfallen, d.h. mit $v_x(t_0) = v_z(t_0) < 0$, mit Impuls $|\vec{p}| = 10$ GeV$/c$ (links) bzw. 50 GeV$/c$ (rechts). Kein Teilchen mit $|\vec{p}| \leq 10$ GeV$/c$, das aus dieser Richtung einfällt kann bis zur Erdoberfläche vordringen. Manchen Teilchen mit $|\vec{p}| = 50$ GeV$/c$ gelingt dies, allerdings nicht in der Nähe des Äquators.

2 Hausaufgaben

2.1 Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht

Wir betrachten einen eindimensionalen (i.e. unendlich dünnen) Draht, durch den ein Strom I fließt. Der Draht befindet sich in einem Magnetfeld.

1. Zeigen Sie, dass die magnetische Kraft auf den Draht geschrieben werden kann als

$$\vec{F}_M = \int d\ell \vec{I} \times \vec{B}(\ell) \,, \tag{2}$$

   wobei das Integral entlang des Drahts in Richtung des Stroms geht, mit $\vec{I} = I d\vec{\ell}/|d\vec{\ell}|$. **[2P]**

2. Wir wollen diese Kraft nutzen, um ein Gewicht der Masse M im Schwerfeld der Erde festzuhalten; s. Skizze. *Hinweis:* Nehmen Sie an, dass das $\vec{B}$–Feld in einem quaderförmigen Gebiet konstant ist, und außerhalb dieses Gebietes verschwindet. Hängen Sie das Gewicht an eine starre, rechteckige Leiterschleife der Ausdehnungen $d_1 \times d_2$, durch die ein Strom I fließt. Wie kann ich die Masse M durch Messung des Stromes I_c bestimmen, bei dem sich die Leiterschleife nicht bewegt? **[3P]**

3. Nun nehmen wir an, dass das Magnetfeld durch einen zweiten, (∞) langen, parallelen Draht verursacht wird, durch den ein Strom I' fließt. Berechnen Sie die Stärke der Kraft, und zeigen Sie, dass die Drähte sich anziehen, wenn die Ströme parallel sind. *Hinweis:* Rechte–Hand–Regel! **[3P]**

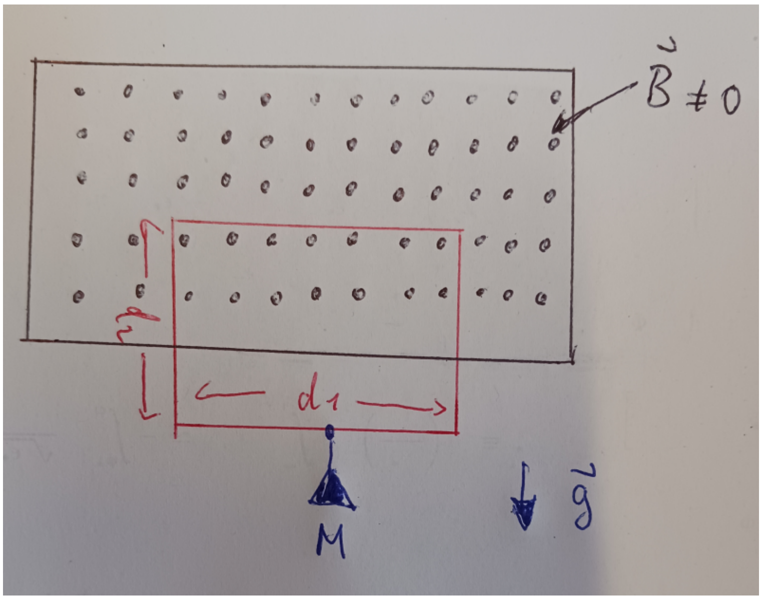

Abbildung 4: Die stromdurchflossene Leiterschleife (rot) liegt teilweise in einem Gebiet mit konstantem $\vec{B} \neq 0$ (schwarz umrandet); das Magnetfeld zeigt aus der Papierebene heraus. Ein Gewicht der Masse M (blau) ist an der starren Leiterschleife befestigt. Wie stark muss der Strom I sein, damit die magnetische Kraft gerade die Schwerkraft auf das Gewicht aufhebt, und in welcher Richtung muss der Strom fließen?

2.2 Selbstinduktion

Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass ein Strom I durch eine Leiterschleife einen magnetischen Fluss Φ durch diese Schleife induziert, mit $\Phi = LI$, s. Gl.(3.24), wobei die Selbstinduktivität L eine Konstante ist. Wir wollen nun einen Strom in dieser Schleife hochfahren, d.h. $I(t) = I_0 \left(\frac{t}{t_0} - 1 \right)$ für $t \geq t_0$ mit $I(t) = 0$ für $t < t_0$. Zeigen Sie, dass dazu eine Spannung $U = LI_0/t_0$ gebraucht wird. *Hinweis:* Benutzen Sie Gl.(3.22) aus der Vorlesung, und beachten Sie die Lenz'sche Regel! **[3P]**

2.3 Ladung in leitender Kugel

Wir betrachten eine Ladung Q, die im Hohlraum einer leitenden Kugel platziert ist; das Zentrum der Kugel sei im Ursprung des Koordinatensystems. Zeigen Sie, dass das elektrische Feld ausserhalb der Kugel gegeben ist durch $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}$, unabhängig davon, wo sich der Hohlraum befindet. *Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Gauss zweimal; im ersten Schritt zeigen Sie, dass sich auf dem Rand des Hohlraums insgesamt die Ladung $-Q$ befinden muss. Beachten Sie Gln.(3.15) aus der Vorlesung! **[4P]**