Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 8. Übungszettel (3. Dezember 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 10. Dezember.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Warum kann man das Lorentz Kraftgesetz, $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$, nicht aus den Maxwell-Gleichungen herleiten?

Q2: Wie groß kann im statischen Fall die Spannung (d.h. die Potenzialdifferenz) zwischen zwei Punkten auf einem (idealen) Leiter sein? Wie groß ist diese Spannung, wenn zwischen diesen Punkten ein Strom I fließt?

1.2 $BAC - CAB$ Regel

1. Zeigen Sie durch explizite Rechnung in kartesischen Koordinaten, dass $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$, für beliebige Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$.

2. Zeigen Sie direkt aus der $BAC - CAB$ Regel, dass $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \vec{C} = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{A}\left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right)$, d.h. das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ. *Hinweis:* $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$, für beliebige Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$.

1.3 Komplexe e-Funktion

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass man aus der Euler–Formel, Gl.(M4.1) in der Vorlesung,

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x\,, \tag{1}$$

sehr leicht Ausdrücke für den Kosinus und Sinus der Summe zweier Winkel herleiten kann. Leiten Sie durch Ableiten von Gl.(1) die Ausdrücke für die erste Ableitung der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion her. *Hinweis:* In Gl.(1) ist x eine beliebige reelle Zahl, und i ist die imaginäre Einheit, d.h. $i^2 = -1$.

2 Hausaufgaben

2.1 $\vec{\nabla}$ und Δ in Kugelkoordinaten

Bisweilen ist die Verwendung von Kugelkoordinaten einfacher als die von kartesischen Koordinaten. Hier wollen wir den Nabla- und den Laplace-Operator in diesen Koordinaten ausdrücken.

1. In Aufgabe 2.2 des 3. Zettels wurde gezeigt, dass die drei Einheitsvektoren, die Variationen in den Kugelkoordinaten r, θ un ϕ entsprechen, geschrieben werden können als:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

   Zeigen Sie daraus, dass die kartesischen Einheitsvektoren geschrieben werden können als:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_\theta - \sin\phi\,\vec{e}_\phi\,; \\ \vec{e}_y &= \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_\theta + \cos\phi\,\vec{e}_\phi\,; \\ \vec{e}_z &= \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\,. \end{aligned} \qquad (3)$$

   Hinweis: Für einen beliebigen Vektor $\vec{A}$ in d Dimensionen gilt immer

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{d} \vec{e}_i (\vec{A}\cdot\vec{e}_i)\,,$$

   wenn die d Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ orthogonal zu einander sind, d.h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$. **[1P]**

2. Um den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten schreiben zu können, brauchen wir die Ableitungen der Kugelkoordinaten nach den kartesischen Koordinaten, d.h. $\partial r/\partial(x,y,z)$; $\partial\theta/\partial(x,y,z)$ und $\partial\phi/\partial(x,y,z)$, wobei $\partial/\partial(x,y,z)$ die partielle Ableitung nach x, y oder z bedeutet. Berechnen Sie diese neun Ableitungen. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\cos\theta = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\sin\phi = y/\sqrt{x^2+y^2}$, und berechnen Sie die relevanten partiellen Ableitungen von $\cos\theta$ und $\sin\phi$ unter Verwendung der Kettenregel. **[5P]**

3. Der Nabla-Operator ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\,. \qquad (4)$$

   Benutzen Sie die Kettenregel in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (5)$$

(und entsprechend für die partiellen Ableitungen nach y und z), und die Ergebnisse des vorigen Schrittes, um zu zeigen, dass

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \,. \tag{6}$$

[4P]

4. Schließlich wollen wir noch den Laplace-Operator $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten ausdrücken. Zeigen Sie unter Benutzung von Gl.(6), dass

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \,. \tag{7}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten selber von θ und/oder ϕ abhängen; im Skalarprodukt $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ können manche Ableitungen im linken $\vec{\nabla}$-Operator deshalb auch auf die Einheitsvektoren im rechten $\vec{\nabla}$-Operator wirken.

[5P]

2.2 Polarisation einer ebenen elektromagnetischen Welle

Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass das elektrische Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle geschrieben werden kann als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\tilde{E}}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right] , \tag{8}$$

mit $\omega/|\vec{k}| = c$ und $\vec{k} \cdot \vec{\tilde{E}}_0 = 0$. Hier wollen wir uns das zeitliche Verhalten von $\vec{E}$ am festen Ort $\vec{r} = 0$ (durch Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems) anschauen. Um die Beschreibung zu vereinfachen, legen wir die $z-$Achse entlang $\vec{k}$, d.h. $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, sodass $\vec{\tilde{E}}_0$ in der (x, y) Ebene liegen muss.

1. Drücken Sie $\vec{E}(0, t)$ unter Benutzung von Gl.(1) durch Winkelfunktionen und den Real- und Imaginärteil des konstanten, komplexen Vektors $\vec{\tilde{E}}_0$ aus. **[1P]**

2. Skizzieren Sie das zeitliche Verhalten von $\vec{E}(0, t)$ über eine volle Periode, d.h. für $\omega t \in [0,\, 2\pi]$, für $\vec{\tilde{E}}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, mit reellen Konstanten a, b. Warum wird dies eine "lineare Polarisation" genannt? **[2P]**

3. Was ändert sich, wenn statt dessen $\vec{\tilde{E}}_0 = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{e}^{i\alpha} \\ b\,\mathrm{e}^{i\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$, mit konstanter reller “Phase” α? **[1P]**

4. Nun skizzieren Sie das zeitliche Verhalten von $\vec{E}(0,t)$ über eine volle Periode, für $\vec{\tilde{E}}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$. Wie würden Sie diese beiden Polarisationszustände (mit positiven oder negativen Vorzeichen in der $y-$Komponente) bezeichnen? **[3P]**