# Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 9. Übungszettel (10. Dezember 2025)

**Abgabe der Hausaufgaben bis:** Mittwoch, 17. Dezember.

## 1 Präsenzaufgaben

### 1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in Differenzialform?

Q2: Wie stehen bei einer elektromagnetischen Welle im Vakuum die Vektoren $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{k}$ zueinander?

Q3: Wie lautet die Kontinuitätsgleichung, die die Erhaltung der elektrischen Ladung beinhaltet? *Hinweis:* Gesucht ist eine Beziehung zwischen der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ und der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

### 1.2 Anwendungen der $\delta-$"Funktion"

1. Zeigen Sie, dass $\int_a^b x^n \, \delta(x) \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall a, b$, falls $n > 0$.
2. Berechnen Sie
$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{\cos x} \delta(\sin(x)) \, \mathrm{d}x \, .$$
3. Berechnen Sie
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \, \delta(x^2 + y^2 - 1) \, .$$
*Hinweis:* Die Stammfunktion von $1/\sqrt{a^2 - x^2}$ ist $\arcsin(x/a)$. Warum ist dieses Integral eine etwas komplizierte Form des Viertels des Umfangs des Einheitskreises?

### 1.3 Gradient und Laplace-Operator angewandt auf $1/r$

1. Zeigen Sie, dass $\nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Betrag von $\vec{r}$ ist.
2. Zeigen Sie im nächsten Schritt, dass $\Delta \left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \forall r \neq 0$.

3. Warum funktioniert die Rechnung des 2. Schrittes nicht bei $r = 0$?
4. Tatsächlich divergiert $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ bei $r \to 0$: Zeigen Sie, dass

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})\,. \tag{1}$$

*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Gauss! Gl.(1) folgt dann aus dem Ergebnis des 2. Schrittes und der Definition der drei-dimensionalen $\delta-$"Funktion".

# 2 Hausaufgaben

## 2.1 Wellenpaket 1

Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass eine ebene Welle unendlich ausgedehnt ist. Hier wollen wir untersuchen, was passiert, wenn das Feld bei $t = 0$ auf ein endliches Raumgebiet konzentriert ist. Der Einfachheit halber werden wir ein eindimensionales Problem betrachten; statt Gl.(4.8) aus der Vorlesung haben wir dann

$$f(x,t) = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\tilde{f}(k)\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega(k)t)}\right]\,; \tag{2}$$

die Welle soll sich mit Lichtgeschwindigeit ausbreiten, d.h.

$$\omega(k) = c|k|\,. \tag{3}$$

1. Ein einfacher Ansatz für den Anfangszustand ist

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{f_0}{b} & \text{falls } |x| \le b \\ 0 & \text{falls } |x| > b \end{cases}\,. \tag{4}$$

Berechnen Sie die Fourier-transformierte Funktion[1]

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,0)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

*Hinweis:* Das Ergebnis ist $\propto \sin(kb)/(kb)$. **[3P]**

2. Zeigen Sie durch Taylor–Entwicklung der Sinus–Funktion, dass $\tilde{f}(k) \simeq$ *konst.* für $|k| < k_b = 1/b$, während es für $|k| > k_b$ abfällt (und oszilliert). Die "Breite" $k_b$ im "Fourierraum" (d.h. in der Fourier–Koordinate $k$) ist daher inverse proportional zur Breite $b$ der ursprünglichen Konfiguration im Ortsraum. (*Anmerkung:* Dies kann als Beispiel der Unschärferelation in der Quantenmechanik interpretiert werden.) **[2P]**

3. Zeigen Sie, dass die Anfangsbedingung (5) *nicht* zu einer Welle führt, die sich in einer bevorzugten Richtung ausbreitet. *Hinweis:* Benutzen Sie Gl.(2), und die Näherung $\tilde{f}(k) \simeq$ *konst.* für $|k| < 1/b$, $\tilde{f}(k) = 0$ sonst. Wie sieht $f(x,t)$ dann bei großen Zeiten aus, d.h. bei $t \gg b/c$? **[4P]**

[1] Da Gl.(5) keinen $1/\sqrt{2\pi}$ Faktor enthält, in Anlehnung an Gl.(4.8) aus der Vorlesung, ist $\tilde{f}(k)$ mit Normierung $1/(2\pi)$ definiert. Hier wollen wir uns aber auf die Form von $\tilde{f}(k)$ konzentrieren.

## 2.2 Wellenpaket 2

Unser erster Anlauf zur Konstruktion eines Wellenpakets, in der vorigen Aufgabe, war nicht wirklich erfolgreich, da die Lösung keine ausgezeichnete Ausbreitungsrichtung hatte. Hier versuchen wir es statt dessen mit einem Ansatz direkt im $k-$Raum:[2]

$$\tilde{f}(k) = \begin{cases} \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}k_b}\,, & \text{falls } k_0 - k_b \le k \le k_0 + k_b\,; \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \,. \tag{6}$$

Wir betrachten den Fall $k_0 > 0$.

1. Zeigen Sie, dass der Ansatz (6) ein Wellenpaket liefert, dass sich in einer bevorzugten Richtung ausbreitet, falls $k_0 > k_b$. (Im dreidimensionalen Fall braucht man $|k_0| \gg k_b$.) **[1P]**

2. Zeigen Sie, dass die inverse Fourier–Transformation angewandt auf den Ansatz (6) *keine* reelle Funktion ist. *Hinweis:* S. den Schluss von Kap. M5 aus der Vorlesung! **[1P]**

3. Berechnen Sie deshalb das zugehörige $f(x,t)$ aus

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \tilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{i(kx - \omega(k)t)}\right]\,, \tag{7}$$

mit $\omega(k) = c|k|$. *Hinweis:* Das Ergebnis hängt von $x$ und $t$ nur in der Kombination $x - ct$ ab; es ist proportional zum Produkt aus einer Kosinus–Funktion mit der Funktion, die Sie bereits aus der vorigen Aufgabe kennen. **[4P]**

4. Zeigen Sie, dass die Lösung in der Tat ein Wellenpaket ist, mit Breite $b = 1/k_b$, d.h. dass $|f(x,t)|$ (sehr) klein wird, falls $x$ sich um (viel) mehr als $b$ von einem Zentralwert unterscheidet. **[2P]**

# 3 Nachtrag zur Vorlesung

In der Vorlesung hatte ich behauptet, dass

$$I := \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin(ax)}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall a > 0\,. \tag{8}$$

Offensichtlich ist $I = \lim_{x_{\max}\to\infty} I_a(x_{\max})$, mit

$$I_a(x_{\max}) := \int_0^{x_{\max}} \mathrm{d}x \frac{\sin(ax)}{x}\,. \tag{9}$$

Als Beleg für Gl.(8) zeigt Abb. 1 Resultate für $I_a(x_{\max})$ für drei verschiedene Werte von $a$.

[2] Beachten Sie, dass wir nun den $1/\sqrt{2\pi}$ Faktor in $\tilde{f}$ aufgenommen haben.

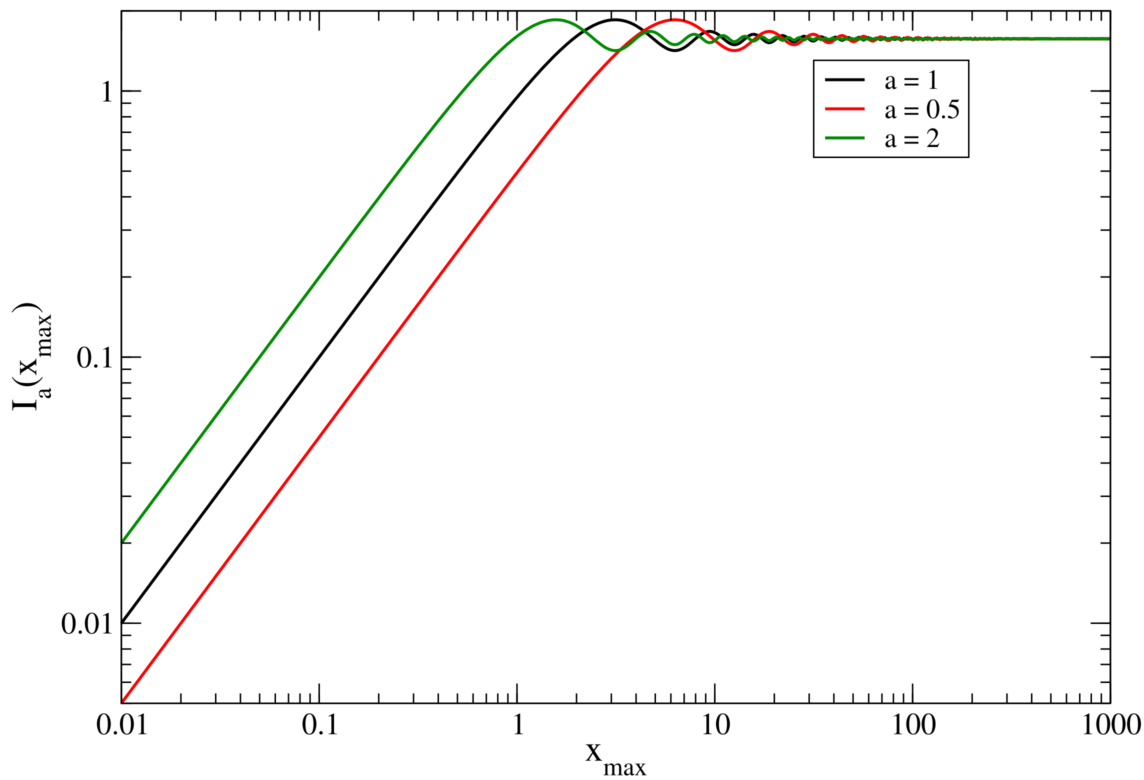


Abbildung 1: Ergebnisse für $I_a(x_{\rm max})$ aus Gl.(9), berechnet durch numerische Integration. Offensichtlich streben $I_{1/2}$, $I_1$ und $I_2$ alle gegen den selben konstanten Wert, wenn $x_{\rm max}$ sehr groß wird; numerisch ist diese Konstante gleich $\pi/2$, wie in Gl.(8) behauptet.