

Übung 1

Hausaufgaben (Abgabe: 18. 4. 2026, 23:59)

Die folgenden Rechenübungen sollen einen Überblick darüber geben, was im Idealfall an Rechenkenntnissen vorhanden sein sollte.

H 1 Ableitungen und Vektorprodukte

$\vec{r}(t)$ sei der Ortsvektor; in kartesischen Koordinaten, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = 2 \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} |\dot{\vec{r}}| = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{|\vec{r}|^3}. \quad (4)$$

Hier bedeutet der Punkt oben eine (totale) Ableitung nach der Zeit (und zwei Punkte bedeuten die zweite Ableitung).

H 2 Totale und partielle Ableitungen

H 2.1

Gegeben sei das Funktional $H(q(t), p(t), t)$, wobei die ersten beiden Variablen von der dritten abhängen. Zeigen Sie, dass für die totale Ableitung gilt:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5)$$

Hinweis: Ein Funktional ist formal eine Funktion von Funktionen; die Ableitungen eines Funktionals können nach der normalen Kettenregel berechnet werden. Die totale Ableitung nach der Zeit bestimmt, wie sehr sich H insgesamt ändert, wenn $t \rightarrow t + dt$, einschließlich der Änderungen von H , die durch die Änderungen von q und p verursacht werden wenn t sich ändert. Die partiellen Ableitungen werden berechnet, in dem q , p und t als unabhängige Variablen betrachtet werden; insbesondere werden bei der Berechnung der partiellen Ableitung nach der Zeit q und p fest gehalten.

H 2.2

Es sei nun $H = p^2 + tq^2$ mit $q(t) = t$ und $p(t) = t^2$ gegeben. Berechnen Sie $\frac{dH}{dt}$ durch Einsetzen von q und p und vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis von Gleichung (5).

H 2.3

Betrachten Sie als weiteres Beispiel das Funktional $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ und zeigen Sie:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6)$$

H 2.4

Was sind die totalen Differentiale dH und dL von H und L ? *Hinweis:* Das totale Differential einer Funktion mehrerer Variablen beschreibt die (infinitesimale) Änderung dieser Funktion, wenn alle Variablen, von der sie abhängt, sich *unabhängig von einander* ändern (um einen jeweils infinitesimalen Betrag).

H 3 Bahnkurve in Zylinderkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten des Ortsvektors \vec{r} lassen sich wie folgt in Zylinderkoordinaten schreiben:

$$\vec{r}(x, y, z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z = \vec{r}(\rho, \varphi, z).$$

Dabei sind \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z die Einheitsvektoren in x , y und z Richtung.

H 3.1

Berechnen Sie die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|}, \quad \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|}$$

in Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass diese ein Orthonormalsystem bilden (d.h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $i = \rho, \varphi, z$ gelten).

H 3.2

Der Vektor $\vec{r}(t)$ beschreibt die Bahn eines punktförmigen Teilchens als Funktion der Zeit t . Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens in Zylinderkoordinaten. Drücken Sie die Ergebnisse durch die Vektoren \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ und \vec{e}_z aus. *Hinweis:* In drei Dimensionen bilden drei orthonormale Vektoren immer eine vollständige Basis, d.h. *alle* Vektoren \vec{A} lassen sich in der Form $\vec{A} = A_\rho\vec{e}_\rho + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$ darstellen.

Viel Spaß!