Übung 2

Anwesenheitsaufgaben

Die erste Aufgabe ist eine kurze Einführung der Drehmatrix, die zum Wechsel des Intertialsystems in der (Newtonschen) Mechanik verwendet werden kann. Der ε-Tensor, der in den folgenden Aufgaben vorgestellt wird, ist ein sehr nützliches mathematisches Hilfsmittel, welches lange umständliche Rechnungen erheblich verkürzen kann.

A 1 Drehmatrix

Sei $\mathcal{O}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $\mathcal{O}\,\mathcal{O}^T = \mathbb{1}$; die Transposition einer Matrix $\mathcal{A}$ entspricht der Spiegelung an der Diagonalen, d.h. für die Elemente der Matrix: $\left(\mathcal{A}^T\right)_{ik} = \mathcal{A}_{ki}$. Die Anwendung von $\mathcal{O}$ ändert weder die Länge eines Vektors noch den Winkel zwischen zwei Vektoren, d.h. $|\mathcal{O}\,\vec{a}| = |\vec{a}|$ und $(\mathcal{O}\,\vec{a}) \cdot (\mathcal{O}\,\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta$, wobei θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

Dieses wollen wir uns an einem einfachen Beispiel veranschaulichen. Sei $\mathcal{R}$ eine 2×2 – Matrix mit

$$\mathcal{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dies ist die Drehmatrix in zwei Dimensionen (Drehung um den Winkel α) wie wir im Folgenden sehen werden.

A 1.1

Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}(\alpha)$ eine Orthogonalmatrix ist. Zeigen Sie weiterhin durch explizite Rechnung, dass sich die Länge eines Vektors und der Winkel zwischen zwei Vektoren bei Anwendung von $\mathcal{R}(\alpha)$ nicht verändert.

A 1.2

Überzeugen Sie sich davon, dass $\mathcal{R}(\alpha)$ eine Drehung um den Winkel α beschreibt. Wie sieht die Verallgemeinerung von $\mathcal{R}(\alpha)$ für drei Raumdimensionen aus? *Hinweis:* In d Dimensionen gibt es $d(d-1)/2$ zu einander orthogonale Ebenen; eine allgemeine Rotationsmatrix in d Dimensionen kann als Produkt der Matritzen geschrieben werden, die eine Rotation in einer dieser Ebenen beschreiben.

A 1.3

Was ist der Wert der Determinante von $\mathcal{R}(\alpha)$? Welche Werte kann die Determinante einer Orthogonalmatrix annehmen?

A 2 Indexschreibweise für Skalar- und Kreuzprodukt

Der total antisymmetrische $\varepsilon-$Tensor wird definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad i,j,k \text{ eine gerade Permutation von } 1,2,3 \text{ bilden,} \\ -1 & \text{wenn} \quad i,j,k \text{ eine ungerade Permutation von } 1,2,3 \text{ bilden,} \\ 0 & \text{wenn} \quad \text{zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Das Kronecker-Symbol δ_{ij} ist definiert durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Folgenden wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, gemäß der über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist. Beispielsweise wird $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ statt $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$ geschrieben, wobei a_i die i-te Komponente des Vektors $\vec{a}$ und $\vec{e}_i$ der i-te Einheitsvektor sind.

A 2.1

Zeigen Sie: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i\, b_i$ und $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.

A 2.2

Zeigen Sie $\varepsilon_{ijm}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\,\delta_{jl} - \delta_{il}\,\delta_{jk}$, $\varepsilon_{ijm}\,\varepsilon_{kjm} = 2\,\delta_{ik}$, und $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6$.

A 2.3

Benutzen Sie die Ergebnisse von A 2.1 und A 2.2, um die so genannte "BAC–CAB-Regel" herzuleiten:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie weiterhin, dass $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ gilt.

A 2.4

Wie kann das Kreuzprodukt $(\vec{b}\times\vec{c})$ durch eine Determinante ausgedrückt werden? Beweisen Sie weiterhin die folgende Gleichung:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Hausaufgaben (Abgabe: 25. 04. 2026)

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele zum Lösen von einfachen Bewegungsgleichungen.

H 1 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen eindimensionalen gedämpften harmonischen Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4}$$

Die Anfangsbedingungen seien $x(t=0) = x_0$ und $v(t=0) = v_0$. Finden Sie $x(t)$ für die Fälle $\omega_0 > \gamma$ (schwache Dämpfung) und $\omega_0 < \gamma$ (starke Dämpfung). Zeigen Sie zudem, dass $ax_1(t) + bx_2(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen sind.

H 2 Fallendes Seil

Ein ausgestrecktes Seil der Masse m und der Länge l gleitet über eine Tischkante ab. Die Reibung sei vernachlässigbar und das Seil soll Biegungen keinen Widerstand entgegensetzen. *Hinweis:* Zu einem bestimmten Zeitpunkt kann ein Stück des Seils offensichtlich über die Tischkante hinabhängen während der restliche Teil noch auf dem Tisch liegt. Die Länge des überhängenden Stückes sei x, mit $x \leq l$.

H 2.1

Skizzieren Sie das Problem und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

H 2.2

Zeigen mit Hilfe der Bewegungsgleichung, dass folgende Größe erhalten ist, d.h. $\dot{E} = 0$:

$$E(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mg\frac{x^2}{2l}\,. \tag{5}$$

Hinweis: Dies ist die Gesamtenergie des Systems, wenn man als Nullpunkt der potenziellen Energie die Oberkante des Tisches wählt.

H 2.3

Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall, dass das Seil zur Zeit $t = 0$ losgelassen wird, wobei ein Stück x_0 vom Tisch herabhängt. Benutzen Sie dazu die Energieerhaltung, d.h. lösen Sie zunächst $E(x)$ nach $\dot{x}$ auf und integrieren Sie dann. (Hinweis: Setzen Sie $E(t) = E(0) = const.$ ein!)

H 3 Pfeil und Bogen

Eine Bogenschützin spannt einen Pfeil in ihrem Bogen und hält inne. Bevor sie den Pfeil loslässt, möchte sie abschätzen, mit welcher Geschwindigkeit v der Pfeil mit der Masse m den Bogen mit der "Bogenkonstante" k, den sie um die Strecke d gespannt hat, verlassen wird. *Hinweis:* Der Bogen soll als Hooke'sche Feder behandelt werden (obwohl bei modernen Sportbogen die Kraft nicht linear von der Auslenkung abhängt).

H 3.1

Skizzieren Sie das Problem, formulieren Sie die Anfangsbedingungen und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

H 3.2

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v durch Separation der Variablen (v, x) und Integrieren der Bewegungsgleichung.

H 3.3

Versuchen Sie nun die Geschwindigkeit mit einer so genannten "Dimensionsanalyse" abzuschätzen, d.h. machen Sie den Ansatz

$$v = f(m, k, d) = m^\alpha k^\beta d^\gamma \tag{6}$$

und bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Einheiten von m, k, d und v die Potenzen α, β und γ. Vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe. Funktioniert diese Methode immer?

Viel Spaß!