

Übung 3

Anwesenheitsaufgaben

Die erste Aufgabe ist eine Übersicht über die Differentialoperatoren, die regelmäßig in Rechnungen benutzt werden. Danach folgen Beispiele für eine nicht konservative Kraft und die Fourier-Zerlegung einer Funktion.

A 1 Differentialoperatoren I

Die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation lauten in kartesischen Koordinaten mit der Notation $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ wie folgt:

$$(\text{grad } U(\vec{x}))_i = \vec{\nabla}_i U(\vec{x}) = \partial_i U(\vec{x}) \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \partial_i A_i(\vec{x}) \quad \text{Summenkonvention!} \quad (2)$$

$$(\text{rot } \vec{A}(\vec{x}))_i = (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(\vec{x}) \quad \text{Summenkonvention!} \quad (3)$$

Hierbei ist $\vec{\nabla}$ der Nabla-Operator mit $\vec{\nabla}_i = \partial_i$. Weiterhin ist der Laplace-Operator $\Delta = \partial_i \partial_i$. Zeigen Sie die folgenden Relationen für eine zweimal stetig differenzierbare skalare Funktion $U(\vec{x})$ bzw. vektorwertige Funktion $\vec{A}(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0, & \text{rot grad } U = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) &= \vec{0}, & \text{div grad } U = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) &= \Delta U \\ \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \Delta \vec{A} \end{aligned}$$

A 2 Konservative Kräfte I

Für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ wird die verrichtete Arbeit

$$W = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (4)$$

nur durch den Anfangs- und Endpunkt, aber nicht durch den genauen Verlauf des Weges S bestimmt. Es gilt $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ (das Kraftfeld ist wirbelfrei). Im Folgenden sollen die Linienintegrale zweier verschiedener Wege für ein nicht konservatives Kraftfeld berechnet und gesehen werden, dass sich deren Werte unterscheiden. (In den Hausaufgaben wird dies für eine konservative Kraft wiederholt.)

Sei¹ $\vec{F} = (y, x^2/3, x + y)^T$ eine Kraft, die auf ein Teilchen zwischen den beiden Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 wirkt, mit den Werten:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Linienintegral (4) zwischen den beiden Punkten, wenn der Weg eine Gerade parallel zur z-Achse ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert, den man erhält, wenn man einen Umweg um den Punkt $\vec{r}' = (3, 3, 3)^T$ geht, d.h. zunächst in gerader Linie von \vec{r}_1 nach \vec{r}' , dann in gerader Linie von \vec{r}' nach \vec{r}_2 . Berechnen Sie die Rotation der Kraft. *Hinweis:* Parameterisieren Sie jeweils die geraden Wegstücke durch eine lineare Funktion $\vec{r}(t)$ mit $t \in [0, 1]$, sodass $\vec{r}(0)$ der Anfangspunkt ist und $\vec{r}(1)$ der Endpunkt. Drücken Sie dann das Differential $d\vec{r}$ durch dt aus.

A 3 Fourier-Zerlegung I

Eine beliebige periodische Funktion $f(t)$ mit Periode $T > 0$ kann durch eine Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen wie folgt beschrieben werden:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (5)$$

¹Das Superskript T steht für Transposition; angewandt auf einen Vektor transformiert das einen Zeilenvektor in einen Spaltenvektor. Zeilenvektoren sind in Komponentenform in LaTeX leichter zu schreiben.

Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ dient hierbei der Skalierung der Periode 2π von Kosinus und Sinus auf die Periode T von $f(t)$. Diese Zerlegung von $f(t)$ wird *Fourier-Zerlegung* (Fourier-Analyse) genannt.

Wenn $f(t)$ bekannt ist, können die Koeffizienten a_i und b_i wie folgt berechnet werden ($n > 0$):

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (6)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (7)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (8)$$

A 3.1

Zeigen Sie, dass die Fourier-Zerlegung (5) die Periodizität der Funktion $f(t)$ reproduziert, also $f(t) = f(t+T)$ gilt.

A 3.2

Zeigen Sie, dass eine Rechteckfunktion $f(t)$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq \omega t < \pi, \\ -1 & \text{wenn } \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad f(t) = f(t + \frac{2\pi}{\omega})$$

wie folgt als Fourier-Zerlegung geschrieben werden kann:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t) = \frac{4}{\pi} [\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots] \quad (9)$$

Hausaufgaben (Abgabe: 2.5.2026)

Die ersten drei Aufgaben dienen zur Vertiefung der Anwesenheitsaufgaben. Das mathematische Pendel ist ein Beispiel zur Lösung einer Differentialgleichung in Polarkoordinaten.

H 1 Differentialoperatoren II

Zeigen Sie mit $x \equiv |\vec{x}|$ und $|\vec{x}| = (x_i x_i)^{1/2}$ (Summenkonvention!) die folgenden Gleichungen:

H 1.1

Gradient:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{x} = -\frac{\vec{x}}{x^3}; \quad \vec{\nabla} (\ln x) = \frac{\vec{x}}{x^2}.$$

H 1.2

Divergenz:

$$\vec{\nabla} \cdot (x\vec{v}) = \vec{v} \cdot \frac{\vec{x}}{x}, \quad \vec{v} = \text{konst.}; \quad \vec{\nabla} \cdot (x^n \vec{x}) = (3+n)x^n; \quad \vec{\nabla} \cdot (x \vec{\nabla} \frac{1}{x^3}) = \frac{3}{x^4}.$$

H 1.3

Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{x} = \vec{0}; \quad \vec{\nabla} \times (\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x}) = \vec{B}, \quad \vec{B} = \text{konst.}; \quad \vec{\nabla} \times (f(x) \vec{x}) = \vec{0}.$$

H 2 Konservative Kräfte II

Wiederholen Sie die Aufgabe A 2 mit der Kraft $\vec{F} = (x + z, z, x + y)^T$.

H 3 Fourier-Zerlegung II

Zeigen Sie, dass eine Sägezahnfunktion $f(t) = 1 - 2t/T$ mit $0 \leq t < T$ und $f(t) = f(t + T)$ wie folgt als Fourier-Zerlegung geschrieben werden kann:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t) = \frac{2}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \dots \right]. \quad (10)$$

H 4 Mathematisches Pendel

Betrachten Sie das mathematische Pendel: Ein Massepunkt der Masse m schwingt reibungsfrei im Schwerfeld an einem masselosen, starren Stab der Länge l . Der Winkel der Auslenkung aus der Ruhelage sei $\varphi(t)$.

H 4.1

Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $\varphi(t)$ auf. Zeigen Sie explizit, dass die Gesamtenergie $E(t)$ erhalten ist.

H 4.2

Lösen Sie die Bewegungsgleichung zunächst für kleine Auslenkungen, $\varphi \ll 1$, sodass $\sin \varphi \approx \varphi$. Was ist die Eigenfrequenz ω_0 bzw. die Schwingungsperiode T in diesem Fall?

H 4.3

Versuchen Sie nun (*ohne* die Näherung für kleine Auslenkungen), die Schwingungsdauer T mit Hilfe der Energieerhaltung bis auf ein (unbestimmtes) so genanntes elliptisches Integral erster Art

$$F(\psi, \sin \frac{\varphi_0}{2}) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi'}} \quad (11)$$

zu bestimmen. Setzen Sie dazu die in H 4.1 berechnete Energie E gleich $-mgl \cos \varphi_0$ (anfängliche potentielle Energie) und lösen Sie nach $dt(\varphi)$ auf. Integrieren Sie durch Trennung der Variablen formal von $\varphi = 0$ bis φ . (Hinweis: Die Zeit, die das Pendel von $\varphi = 0$ bis zum Maximalausschlag $\varphi = \varphi_0$ braucht, ist gleich dem Viertel einer Schwingungsdauer.) Substituieren Sie im Integral $\sin \psi = \sin \frac{\varphi}{2} / \sin \frac{\varphi_0}{2}$. Zeigen Sie schließlich:

$$T = 4t(\varphi \rightarrow \varphi_0) = \frac{4}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\varphi_0}{2}\right). \quad (12)$$

Was passiert für $\varphi_0 \rightarrow \pi$ (d.h. das Pendel "steht Kopf")? Kann T für kleine Auslenkungen, wie es in Aufgabe H 4.2 berechnet wurde, aus Gleichung (12) reproduziert werden?

Viel Spaß!