

## Übung 4

### Anwesenheitsaufgaben

Die erste Aufgabe befasst sich mit gekoppelten Oszillatoren, s. Kapitel II d in der Vorlesung. Die zweite Aufgabe stellt die Taylorreihe vor, mit der Funktionswerte genähert werden können; dies geschieht z.B. bei der Betrachtung von kleinen Auslenkungen eines Pendels.

### A 1 Zwei gekoppelte Federn

Wir betrachten ein System aus drei Federn. Die linke und rechte Feder, mit Federkonstanten  $k_1$  und  $k_2$ , sind mit einer Seite an Wänden befestigt, an der anderen Seite hängen die Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Die beiden Massen sind durch eine dritte Feder mit Federkonstante  $\kappa'$  miteinander verbunden. Wir betrachten nur ein-dimensionale Bewegungen, wobei  $x_1$  und  $x_2$  die Auslenkung aus der Ruhelage der ersten bzw. zweiten Masse ist.

#### A 1.1

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. *Hinweis:* Sie sollten zwei gekoppelte Gleichungen bekommen.

#### A 1.2

Zeigen Sie, dass die gesamte mechanische Energie des Systems gegeben ist durch

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \kappa' (x_1 - x_2)^2] . \quad (1)$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser fünf Terme?

#### A 1.3

Zeigen Sie unter Benutzung der Bewegungsgleichungen, dass die Gesamtenergie erhalten ist,  $\dot{E}_{\text{tot}} = 0$ .

#### A 1.4

In der Vorlesung wurden die Bewegungsgleichungen in folgende Form gebracht:

$$\ddot{x}_1 + \omega_{11}^2 x_1 - \omega_{12}^2 x_2 = 0; \quad \ddot{x}_2 + \omega_{22}^2 x_2 - \omega_{21}^2 x_1 = 0 . \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass

$$\omega_{11}^2 = \frac{k_1 + \kappa'}{m_1}, \quad \omega_{22}^2 = \frac{k_2 + \kappa'}{m_2}, \quad \omega_{12}^2 = \frac{\kappa'}{m_1}, \quad \omega_{21}^2 = \frac{\kappa'}{m_2},$$

und benutzen Sie diese Ausdrücke, um zu zeigen, dass beide Eigenfrequenzen aus Gl.(II.45) in der Vorlesung reell sind, d.h. dass

$$\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2 \geq \sqrt{(\omega_{11}^2 - \omega_{22}^2)^2 + 4\omega_{12}^2 \omega_{21}^2} .$$

### A 2 Taylorreihe I

Betrachten Sie die Entwicklung einer reellen Funktion  $f$  in eine Potenzreihe um den Ursprung,  $x = 0$ :

$$f(x) = a_i x^i \quad (3)$$

mit reellen Koeffizienten  $a_i$ . In Gl.(3) wurde die Summenkonvention benutzt, wobei die Summe bei  $i = 0$  (d.h. einem konstanten Term) beginnt.

#### A 2.1

Angenommen, eine Funktion  $f$  lasse sich durch die Entwicklung (3) darstellen. Was gilt dann für die Koeffizienten, wenn  $f$  gerade [ $f(-x) = f(x)$ ] bzw. ungerade [ $f(-x) = -f(x)$ ] ist?

**A 2.2**

Nehmen Sie an, dass alle  $n$ -ten Ableitungen  $f^{(n)}(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , nur an der Stelle  $x = 0$  bekannt seien. Bestimmen Sie nun die Koeffizienten  $a_i$  in Gleichung (3). *Hinweis:*  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ .

**A 2.3**

Inwiefern kann man eine Taylorreihe bei kleinen Auslenkungen eines Pendels benutzen?

**Hausaufgaben (Abgabe: 9. 5. 2026)**

Die erste Aufgabe dient der Übung zur Berechnung von Taylorreihen. In den folgenden Aufgaben sollen wieder anhand der auftretenden Kräfte Bewegungsgleichungen aufgestellt und gelöst werden.

**H 1 Taylorreihe II****H 1.1**

Versuchen Sie die folgenden Funktionen mit einer Taylorreihe um  $x = 0$  zu entwickeln:

$$\cos(x), \quad \sin(x), \quad e^x, \quad 1/(1-x) \quad \text{und} \quad \sqrt{x}. \quad (4)$$

Ist dies für alle Beispiele möglich?

**H 1.2**

Schätzen Sie die folgenden Werte mit Hilfe der Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung ab (ohne Taschenrechner):  $\sqrt{17}$ ,  $\sqrt{33}$ , und  $\sqrt{270}$ . *Hinweis:* Faktorisieren Sie das Argument der Wurzel zunächst mit einer nahe gelegenen Quadratzahl, z.B.  $17 = 16 \cdot (1 + 1/16)$ . Entwickeln Sie dann  $\sqrt{1+x}$  für kleine  $|x|$ . Vergleichen Sie diese Abschätzungen mit den tatsächlichen Werten und berechnen Sie den Fehler (mit Taschenrechner). Wiederholen Sie die Abschätzung für die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung.

**H 1.3**

Beweisen Sie mit Hilfe der Taylorreihe die Eulersche Formel  $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , wobei  $\varphi$  reell ist.

**H 2 Fallschirmsprung**

Ein Fallschirmspringer der Masse  $m$  springt zur Zeit  $t = 0$  aus einem Flugzeug. Er unterliegt der Schwerkraft sowie der Reibungskraft  $F = c v^2$ , wobei  $c$  als konstant angenommen werden soll. (Bevor der Fallschirm sich öffnet bewegt sich der Fallschirmspringer so schnell, dass der Term in der Reibungskraft  $\propto v^2$  dominiert.) Der Koeffizient  $c$  kann aus der Grenzggeschwindigkeit  $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  bestimmt werden.

**H 2.1**

Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie den Luftreibungskoeffizienten  $c$  als Funktion der Grenzggeschwindigkeit  $v_\infty$ . Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis einer Dimensionsanalyse.

**H 2.2**

Lösen Sie nun die Bewegungsgleichung durch Einsetzen von  $v_\infty$ , Separation der Variablen und anschließenden zweimaligen Integrieren.

**H 3 Ballwurf**

Ein Ball der Masse  $m$  wird vom Erdboden (Höhe  $x = 0$ ) zur Zeit  $t_0 = 0$  senkrecht hochgeworfen mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Der Luftwiderstand soll sich durch die Kraft  $F = -m\alpha v$  bemerkbar machen. Hierbei ist  $\alpha$  eine positive Konstante und  $v$  die Geschwindigkeit des Balles. (Ein geworfener Ball bewegt sich in der Regel deutlich langsamer als ein fallender Mensch.)

**H3.1**

Stellen Sie die Bewegungsgleichung für  $v(t)$  auf, und lösen Sie sie durch Trennung der Variablen. *Hinweis:* Die Zeit sollte eine Funktion der dimensionslosen Größe  $\alpha v/g$  sein, dividiert durch  $\alpha$ ; der Ausdruck ist also scheinbar singular für  $\alpha \rightarrow 0$ . Zeigen Sie durch Taylor-Entwicklung der Funktion, dass für  $\alpha \rightarrow 0$  das bekannte Ergebnis des reibungsfreien senkrechten Wurfs reproduziert wird.

**H3.2**

Sei  $v_e$  die Geschwindigkeit, mit der der Ball wieder auf den Boden prallt. Argumentieren Sie physikalisch, dass für  $\alpha \neq 0$  gilt  $|v_e| < |v_0|$ , mit  $v_e v_0 < 0$ . Zeigen Sie unter Benutzung des Ergebnisses von H3.1, dass für festes  $v_0$  der Ball länger in der Luft ist, wenn  $\alpha \neq 0$ .

**H 3.3**

Nun schreiben Sie die Bewegungsgleichung um in eine Gleichung für  $v(x)$  und  $dv(x)/dx$ , und lösen Sie diese Gleichung ebenfalls durch Trennung der Variablen. Benutzen Sie diese Lösung, um die maximale Höhe  $x_{\max}$  der Bahn des Balls zu berechnen, sowie die Geschwindigkeit  $v_e$ , mit der der Ball wieder auf die Erde prallt. *Hinweis:* Nehmen Sie bei der Berechnung der Aufprallgeschwindigkeit an, dass  $\alpha v_0/g \ll 1$ , und benutzen Sie eine Taylor-Entwicklung der Lösung  $v(x)$  in dieser kleinen Größe.

Viel Spaß!