

## Übung 5

### Anwesenheitsaufgaben

In der ersten Aufgaben werden die Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet und Eigenschaften dieser betrachtet. Danach soll ein einfaches Beispiel, die Atwoodsche Fallmaschine, mit diesen berechnet werden.

### A 1 Grundlagen der Variationsrechnung

Ein System nehme zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  die durch die verallgemeinerten Koordinaten  $q_i(t_1)$  und  $q_i(t_2)$  bestimmten Positionen ein. Es gilt  $i = 1, 2, \dots, n$ , wobei  $n$  die Dimension des Konfigurationsraums (d.h. die Anzahl der Freiheitsgrade) sei. Das System entwickle sich zwischen den beiden Zeitpunkten derart, dass die Wirkung, gegeben durch das Funktional

$$S(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (1)$$

extremal wird ( $L$  ist die Lagrangefunktion). Im Folgenden wird der Einfachheit halber  $n = 1$  gewählt. Nehmen Sie an, dass die Funktion  $q(t)$  ein Extremum von  $S$  ist, d.h. sie minimiert oder maximiert  $S$ . Betrachten Sie nun die Variation von  $S$ , indem  $q(t)$  durch  $q(t) + \varepsilon \eta(t)$  ersetzt wird. Hierbei sind  $\varepsilon$  ein kleiner, konstanter Parameter und  $\eta(t)$  eine Störfunktion. Die Randbedingungen sind  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ ; ansonsten ist  $\eta(t)$  nicht festgelegt.

#### A 1.1

Skizzieren Sie das Problem. Was ist der Unterschied zwischen Extrema in der Variationsrechnung und in der Funktionalanalysis? Was ist die Ableitung  $\frac{d}{dt}(q(t) + \varepsilon \eta(t))$ ?

#### A 1.2

Zeigen Sie für die Variation von  $S$ :

$$\delta S = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon \eta(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t), t) dt \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta}(t) \right) dt = 0 \quad (2)$$

Integrieren Sie partiell, um  $\dot{\eta}$  zu eliminieren. Was passiert mit den Randtermen? Wieso wird  $\delta S = 0$  gefordert? Warum darf  $\frac{d}{d\varepsilon}$  unter das Integral gezogen werden?

#### A 1.3

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung besagt, dass aus dem Verschwinden des Integrals  $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$  für beliebige  $f(x)$  folgt, dass  $g(x) \equiv 0$  sei, falls alle auftretenden Funktionen hinreichend gutartig sind. Leiten Sie daraus, und dem Ergebnis von A 1.2, die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELGen) her:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3)$$

#### A 1.4

Wieso erhält man bei  $n$  Koordinaten  $n$  ELGen  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$  mit  $1 \leq i \leq n$ ?

#### A 1.5

Eine Koordinate  $q_i$  heißt zyklisch, wenn  $L$  nur von ihrer zeitlichen Ableitung  $\dot{q}_i$  aber nicht von  $q_i$  selber abhängt. Was gilt für den dazugehörigen kanonischen Impuls  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ?

### A 1.6

Um die Bewegungsgleichungen eines konservativen Systems zu erhalten, wird  $L = E_{\text{kin}} - V$  gesetzt, wobei  $V$  die potenzielle Energie ist. Berechnen Sie die ELGen in kartesischen Koordinaten. Welchem Gesetz entsprechen diese?

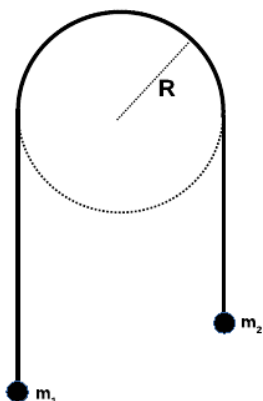


Abbildung 1: Skizze Atwoodsche Fallmaschine

## A 2 Atwoodsche Fallmaschine

Über eine masselose Rolle mit Radius  $R$  wird ein ebenso masseloses Seil mit der Länge  $l$  reibungslos geführt, an dessen Enden sich zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  befinden (siehe Abbildung 1). Auf sie wirkt die Gewichtskraft. Die  $z$ -Achse soll vernachlässigt werden (d.h. die Massen bewegen sich nur in der  $(x, y)$  Ebene.)

### A 2.1

Wählen Sie zunächst geeignete Koordinaten. Es bietet sich an die  $y$ -Koordinate der ersten Masse als freie Koordinate  $y_1$  anzunehmen und die  $y$ -Koordinate der zweiten Masse durch diese auszudrücken.

### A 2.2

Stellen Sie die Lagrangefunktion auf, indem Sie die kinetische und die potenzielle Energie durch die gewählten Koordinaten ausdrücken.

### A 2.3

Gibt es Erhaltungsgrößen? Stellen Sie die ELG(en) auf.

### A 2.4

Lösen Sie die Bewegungsgleichung(en).

## Hausaufgaben (Abgabe: 16. 5. 2026)

### H 1 Harmonischer Oszillator als Grundlage der theoretischen Physik

In sehr vielen Bereichen der (theoretischen) Physik begegnet man dem harmonischen Oszillator. Aber warum ist das so?

Betrachten Sie dazu das Potenzial

$$V(x) = ax^{-7} - bx^{-3}, \quad (4)$$

wobei  $a$  und  $b$  positive Konstanten sind; ähnliche Potenziale werden in der Molekülphysik benutzt. Ein Teilchen der Masse  $m$  befinde sich zunächst im Minimum  $x_M$  des Potenzials. Es wirken keine weiteren Kräfte.

### H 1.1

Skizzieren Sie das Potenzial (4). Wo liegt sein absolutes Minimum  $x_M$ ?

### H 1.2

Das System ist offensichtlich konservativ, d.h. die mechanische Gesamtenergie  $E_{\text{kin}} + V$  ist erhalten. Finden Sie graphisch die erlaubten Werte von  $x$  als Funktion der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}(x_M)$ , die das Teilchen im Potenzialminimum  $x_M$  hat. *Hinweis*: Sie müssen die Fälle mit positiver und negativer Summe  $V(x_M) + E_{\text{kin}}(x_M)$  unterscheiden. (Warum?)

### H 1.3

Nehmen Sie nun an, dass die kinetische Energie relativ klein ist, sodass für alle nach H 1.2 erlaubte  $x$  gilt, dass  $|x - x_M| = \delta \ll x_M$  ist. Entwickeln Sie das Potenzial um das Minimum bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung in  $\delta$ .

### H 1.4

Stellen Sie die Bewegungsgleichung für kleine  $\delta$  auf, unter Benutzung des Ergebnisses von H 1.3. Was fällt auf?

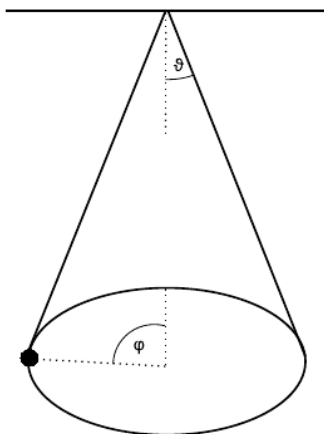


Abbildung 2: Pendel in drei Dimensionen.

## H 2 Pendel in drei Dimensionen

Wir betrachten ein Pendel, dass in zwei Richtungen schwingen kann (s. Abb. 2), d.h. die Masse  $m$  bewegt sich in drei Dimensionen; die Länge  $l$  der (masselosen) Aufhängung ist konstant, der Aufhängepunkt ist fest.

### H 2.1

Leiten Sie die kinetische Energie in Abhängigkeit der Winkel  $\theta$  und  $\phi$  und ihrer zeitlichen Ableitungen her. Zeigen Sie, dass daraus die Lagrangefunktion

$$L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgl(1 - \cos \theta) \quad (5)$$

folgt, wenn man den Nullpunkt der potenziellen Energie in den Ruhepunkt des Pendels ( $\theta = 0$ ) legt. *Hinweis*: Wählen Sie den Aufhängepunkt als Ursprung des Koordinatensystems. Welche Koordinaten sind hier bequem?

### H 2.2

Welche Variable  $q$  taucht in  $L$  nicht explizit auf, d.h.  $\partial L / \partial q = 0$ ? Benutzen Sie die relevante Lagrange-Gleichung, um die zugehörige Erhaltungsgröße zu finden.

**H 2.3**

Leiten Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel  $\theta$  her.

**H 2.4**

Fall 1: Zeigen Sie, dass die Bedingung  $\phi = \phi_0$  mit  $\dot{\phi} = 0$  wieder auf das mathematische Pendel aus dem vorigen Übungszettel führt.

**H 2.5**

Fall 2: Nun betrachten wir den Fall  $\theta = \theta_0$  mit  $\dot{\theta} = 0 \forall t$ . Was für eine Bewegung führt der Massenpunkt aus? Wie lange braucht er für einen Umlauf, d.h. wie lang ist die Periode?

**H 2.6**

Jetzt betrachten wir eine kleine Störung des 2. Falls, d.h.  $\theta = \theta_0 + \delta$  mit  $|\delta| \ll \theta_0$ . Zeigen Sie, dass für  $\delta$  die folgende Bewegungsgleichung gilt:

$$\ddot{\delta} + \frac{g}{l} \sin(\theta_0 + \delta) - \frac{g \sin^4 \theta_0 \cos(\theta_0 + \delta)}{l \cos \theta_0 \sin^3(\theta_0 + \delta)} = 0. \quad (6)$$

*Hinweis:* Benutzen Sie das Ergebnis aus H 2.2; nehmen Sie dabei an, dass die Erhaltungsgröße den Wert aus H 2.5 hat.

**H 2.7**

Da  $|\delta|$  klein sein soll, entwickeln Sie die Bewegungsgleichung (6) bis zur ersten Ordnung in  $\delta$ . Zeigen Sie, dass in dieser Näherung  $\delta$  harmonisch oszilliert. Was ist die Kreisfrequenz oder Periode dieser Oszillation?

Viel Spaß!