Übung 6

Anwesenheitsaufgaben

Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Wie ist die kinetische Energie einer Punktmasse M definiert?

Q2: Wann ist eine (drei–dimensionale) Kraft konservativ?

Q3: Was ist eine Zentralkraft? Ist eine solche Kraft immer konservativ?

Die folgende Anwesenheitsaufgabe ist ein Beispiel zur Anwendung der Variationsrechnung.

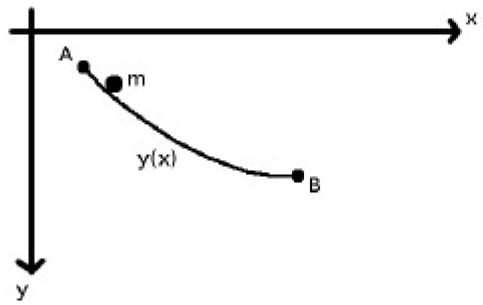

Abbildung 1: Skizze Brachistochrone. In der Rechnung werden wir den Punkt A in den Ursprung legen (oder umgekehrt).

A 1 Brachistochrone

Das so genannte Brachistochronenproblem wurde 1696 von Johann Bernoulli als Wettbewerbsaufgabe gestellt. Die Lösung führte zur Begründung der Variationsrechnung. Ein Massenpunkt soll über einen festgelegten Weg von A nach B laufen (siehe Abbildung 1); wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems so, dass $A = (x_A, y_A) = (0, 0)$ und $B = (x_B, y_B)$. Was ist die schnellste Verbindung $y(x)$ zwischen den beiden Punkten, wenn als einzige Kraft die Erdanziehung wirkt? Der Massenpunkt ruht zu Beginn.

A 1.1

Was ist das Linienelement ds? Zeigen Sie, dass die Zeit T, die der Massenpunkt braucht, um von A nach B zu laufen, als

$$T = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ und v die Geschwindigkeit des Massenpunktes.

A 1.2

Eliminieren Sie v aus Gleichung (1) mit Hilfe der Energieerhaltung. Wie zuvor in Aufgabe A 1 der Übung 5 das Integral $S(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\, dt$ minimiert wurde, soll hier ein Integral der gleichen Form mit

$T(y(x), y'(x), x) = \int_A^B L(y(x), y'(x), x)\, dx$ minimiert werden. Wenden Sie die ELG entsprechend an. Hinweis: Es ist einfacher

$$H := L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = k_1 = \text{konst.} \tag{2}$$

mit Hilfe der ELG zu zeigen und H zur weiteren Lösung zu benutzen anstatt die ELG direkt anzuwenden. (Dies ist eine Legendre–Transformation; wenn L eine Lagrangefunktion wäre, wäre H die entsprechende Hamiltonfunktion.) Zeigen Sie, dass in unserem Fall $H \propto 1/\sqrt{y\left(1 + y'^2\right)}$.

A 1.3

Finden Sie die schnellste Verbindung durch Lösung von Gleichung (2). *Hinweis:* Machen Sie den Ansatz $y = r_0\,(1 - \cos\varphi)$ und $x = r_0\,(\varphi - \sin\varphi) + k_2$ mit konstantem k_2, und zeigen Sie, dass dann H in der Tat konstant ist. Die Brachistochrone entspricht somit einer Zykloide (Rollkurve), d.h. x und y sind die Koordinaten eines Punktes auf einem Rad mit Radius r_0, das in x Richtung rollt, wobei φ der Rollwinkel ist.

A 1.4

Zeigen Sie, dass die Zeit, die der Massenpunkt mit der schnellsten Verbindung benötigt, gegeben ist durch $T_{\text{Brach}} = \varphi_B\sqrt{r_0/g}$, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Berechnen Sie zum Vergleich die Zeit, die der Massenpunkt auf einer direkten Geraden von A nach B braucht (ausgrdrückt durch x_B und y_B). Der Endpunkt φ_B lässt sich nicht analytisch (durch elementare Funktionen) durch x_B und y_B ausdrücken. Überzeugen Sie sich davon, dass für $\varphi_B = \pi/2,\ \pi$ und $3\pi/2$ der Weg über die Brachistochrone in der Tat schneller ist als der gerade Weg.

Hausaufgaben (Abgabe: 13. 6. 2026)

Die Hausaufgaben beinhalten weitere Beispiele zur Übung des Lagrangeformalismusses.

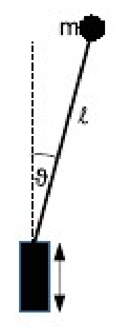

Abbildung 2: Skizze stehendes, vertikal angetriebenes Pendel

H 1 Stehendes Pendel

Eine Punktmasse m ist am Ende eines starren, masselosen Stabs der Länge ℓ befestigt, s. Abb. 2. Das andere Ende des Stabes ist an einer Aufhängung so befestigt, dass ein Motor die Höhe der Aufhängung $y(t)$ variieren kann. Der Stab soll dabei, wie in der Skizze gezeigt, nach oben zeigen. Wir wollen zeigen, dass die Bewegung der Aufhängung den Stab in dieser Position stabilisieren kann.

H 1.1

Stellen Sie die Lagrangefunktion in den Variabel y und θ auf. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für den Winkel θ gegeben ist durch

$$\ell\ddot{\theta} - \ddot{y}\sin\theta = g\sin\theta\,, \tag{3}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist.

H 1.2

Der Motor erzwingt die Bewegung $y(t) = A\cos(\omega t)$. Zeigen Sie, dass für $|\theta| \ll 1$ die Bewegungsgleichung (3) in folgende Form gebracht werden kann:

$$\ddot{\theta} + \theta\left[a\omega^2\cos(\omega t) - \omega_0^2\right] = 0\,, \tag{4}$$

und bestimmen Sie die Konstanten a und ω_0.

H 1.3

Es ist keine analytische Lösung der Bewegungsgleichung (4) bekannt. Für $A \ll \ell$ und $a\omega^2 \gg \omega_0^2$ kann aber die Dynamik näherungsweise analytisch untersucht werden. Dazu machen wir den Ansatz

$$\theta(t) = C(t) + b\cos(\omega t)\,, \tag{5}$$

wobei C eine relativ langsam variierende Funktion sein soll, d.h. $|\dot{C}| \ll |\omega C|$, aber $|b| \ll |C|$. Auf kleinen Zeitskalen können wir deshalb C als konstant annehmen. Zeigen Sie, dass dann Gl.(4) äquivalent ist zu

$$-b\omega^2\cos(\omega t) + Ca\omega^2\cos(\omega t) = 0\,; \tag{6}$$

bestimmen Sie daraus den Koeffizienten b im Ansatz (5).

H 1.4

Um das Verhalten über längere Zeiträume zu verstehen, kann man über eine Schwingung der Aufhängung mitteln. Betrachten Sie dazu die Größe

$$\bar{\ddot{\theta}} = \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{\theta}\,\mathrm{d}t\,, \tag{7}$$

mit $T = 2\pi/\omega$. Benutzen Sie Gl.(4) und den Ansatz (5) um zu zeigen, dass

$$\bar{\ddot{\theta}} = -C\Omega^2\,, \tag{8}$$

und bestimmen Sie die Konstante Ω^2.

H 1.5

Setzen Sie nun den Ansatz (5) in Gl.(8) ein, um eine Bewegungsgleichung für $C(t)$ herzuleiten.

H 1.6

Zeigen Sie, dass unser Ansatz $a\omega^2 \gg \omega_0^2$ impliziert, dass Ω reell ist. In diesem Fall (eine hochfrequente Auslenkung mit kleiner Amplitude) führt der Massenpunkt somit harmonische Oszillationen um die *senkrechte* Position aus; der Effekt der Auslenkung mittelt sich also *nicht* weg.

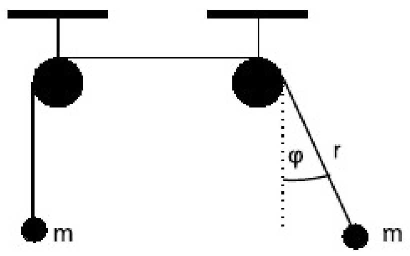

Abbildung 3: Skizze Pendel hängt an Masse

H 2 Pendel hängt an Masse

Zwei Punktmassen m sind mit einem masselosen Seil fester Länge l verbunden, welches reibungsfrei über zwei Rollen verläuft (siehe Abbildung 3). Die Größen der Rollen können vernachlässigt werden. Die linke Masse kann sich nur in vertikaler Richtung, also nach oben und unten bewegen. Die rechte Masse hat zusätzlich die Freiheit in der Ebene zu schwingen, d.h. nach links und rechts.

H 2.1

Benutzen Sie die in der Abbildung zu sehenden Koordinaten r und φ als freie Koordinaten. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

H 2.2

Finden Sie die Bewegungsgleichungen von r und φ.

H 2.3

Nehmen Sie an, dass die linke Masse zu Beginn ruht, während die rechte Masse auf gleicher Höhe hängt, aber um einen kleinen Winkel α mit $\alpha \ll 1$ ausgelenkt wird und anfängt hin und her zu schwingen. In welche Richtung wird die linke Masse anfänglich beschleunigt und wie groß ist diese Beschleunigung? (Hinweis: Berücksichtigen Sie nur φ-Terme bis zur zweiten Ordnung und mitteln Sie die Beschleunigung über ein paar Schwingungen.)

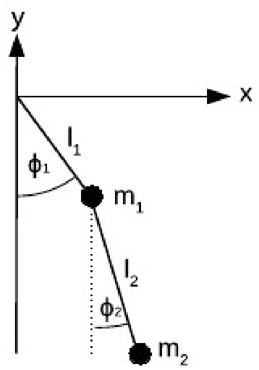

Abbildung 4: Skizze Doppelpendel

H 3 Doppelpendel

Betrachten Sie das Doppelpendel mit den Massenpunkten m_1 und m_2, sowie den festen Pendellängen l_1 und l_2 (siehe Abbildung 4). Wählen Sie die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 als verallgemeinerte Koordinaten.

H 3.1

Schreiben Sie die kartesischen Koordinaten x_j und y_j mit $j = 1, 2$ als Funktionen der ϕ_j.

H 3.2

Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\phi_j, \dot{\phi}_j)$ auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.

H 3.3

Finden Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen für den Fall $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ und kleiner Auslenkungen (berücksichtigen Sie ϕ_j nur bis zur ersten Ordnung). Machen Sie den Ansatz $\phi_j(t) = a_j \exp(i\,\omega\,t)$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus einer Überlagerung der gefundenen Fundamentalschwingungen. Bestimmen Sie nun die Lösung für die Anfangsbedingungen $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ und $\dot{\phi}_1(0) = \omega_0$.

H 3.4

Betrachten Sie nun die erzwungene Schwingung $\phi_1(t) = \phi_0 \sin(\Omega t)$. Bestimme die Lösung von $\phi_2(t)$ für kleine Auslenkungen.

Viel Spaß!