Übung 7

Anwesenheitsaufgaben

Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: *(i)* Wie ist die Lagrange–Funktion definiert? *(ii)* Wie berechnet man daraus die Wirkung?

Q2: Wie lauten die Euler–Lagrange Bewegungsgleichungen?

Q3: Welche Bedingung muss die Lagrange–Funktion erfüllen, damit *(i)* die Energie, *(ii)* der Drehimpuls erhalten ist?

A 1 Noether Theorem

In der Vorlesung hatten wir bereits mehrere Anwendungen des Noether Theorems gesehen: Aus Symmetrien der Lagrangefunktion hatten wir die Erhaltung von Energie, linearem Impuls, und Drehimpuls hergeleitet. Hier wollen wir das Noether Theorem allgemeiner behandeln.

Ausgangspunkt ist eine Lagrangefunktion $L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$, wobei die q_i verallgemeinerte Koordinaten sind. Wir betrachen die Transformation

$$q_i \to Q_i(q_k,\, t,\, \alpha)\,, \tag{1}$$

wobei α ein kontinuierlicher Parameter ist, und die Q_i differenzierbare und invertierbare Funktionen sind, mit $Q_i(q_k,\, t,\, \alpha = 0) = q_i$ [d.h. die "Transformation" (1) wird die Identität für $\alpha \to 0$]. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass sich die Bewegungsgleichungen nicht ändern, wenn man die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion $F(q_i, t)$ zu L addiert, s. Gl.(III.35). Die Physik ist deshalb invariant, d.h. Gl.(1) beschreibt eine *Symmetrietransformation*, falls unter dieser Transformation

$$L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) \to L(Q_i,\, \dot{Q}_i,\, t) + \frac{\mathrm{d}F(q_i,\, t,\, \alpha)}{\mathrm{d}t}\,, \tag{2}$$

für eine differenzierbare Funktion F.

A 1.1

Zeigen Sie, dass aus Gl.(2) folgt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \frac{\partial L(q_k,\, \dot{q}_k,\, t)}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} \equiv \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\,, \tag{3}$$

d.h. J ist erhalten; es wird als zur Transformation (1) gehörige *Noether Ladung* genannt. *Hinweis:* Berechnen Sie die Ableitung $\mathrm{d}L(Q_i,\, \dot{Q}_i,\, t)/\mathrm{d}\alpha$ an der Stelle $\alpha = 0$, und benutzen Sie die Bewegungsgleichungen!

A 1.2

Leiten Sie in dieser Formulierung die Impulserhaltung aus der Translationsinvarianz der Lagrangedichte ab (d.h. $F = 0$). Wieviele verschiedene Transformationen der Form (1) braucht man, um die Erhaltung des (vektoriellen!) Gesamtimpulses $\vec{P}$ zu zeigen?

A 1.3

Nun betrachten wir einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, mit

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 - kx^2\right) . \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass

$$x \to X = x + \alpha\cos(\omega t) \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{5}$$

eine Symmetrietransformation ist. *Hinweis:* In diesem Fall ist $F \neq 0$. Leiten Sie dann aus Gl.(3) ab, dass $J = m\left[\dot{x}\cos(\omega t) + \omega x\sin(\omega t)\right]$. Benutzen Sie schließlich die Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, $x(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$, um zu zeigen, dass J in der Tat erhalten ist.

Hausaufgaben (Abgabe: 20. 6. 2026)

H 1 Pendel mit Newton, Lagrange und Hamilton

Eine Punktmasse m hängt an einem Faden der Länge l. Nur die Gewichtskraft wirkt.

H 1.1

Geben Sie die Lagrangefunktion L, die Hamiltonfunktion H, sowie die totale Energie $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + V$ des Pendels an.

H 1.2

Leiten Sie die Bewegungsgleichung des Pendels im Rahmen der Newtonschen, Lagrangeschen und Hamiltonschen Mechanik ab.

H 1.3

Gilt $H = E_{\text{tot}}$? Ist H bzw. E_{tot} erhalten? Kann dies ohne Rechnung gesehen werden?

H 1.4

Leiten Sie nun zuletzt die Bewegungsgleichung mithilfe der Energieerhaltung ab, d.h. fordern Sie $\dot{E}_{\text{tot}} = 0$ und folgern Sie daraus die Bewegungsgleichung.

H2 Inelastischer Stoß

Hinweis: Diese Aufgabe ist einer alten Klausur entnommen!

Bei elastischen Stößen ist der Impuls sowie die kinetische Energie erhalten. Bei inelastischen Stößen hingegen ändert sich die Energie der beiden Stoßpartner derart, dass

$$E_{\text{kin},\,i} = E_{\text{kin},\,f} + Q \tag{6}$$

erfüllt ist. Die Indizes i und f bezeichnen hierbei den Anfangs- und Endzustand. Für $Q > 0$ absorbieren die Reaktionspartner Energie (z.B. durch Aufwärmung), während sie für $Q < 0$ Energie abgeben (z.B. kann bei Kernreaktionen ein angeregter Zustand in den Grundzustand übergehen). Zur Beschreibung inelastischer Stöße kann auch alternativ der Koeffizient

$$e = \frac{|\vec{v}_{2,\,f} - \vec{v}_{1,\,f}|}{|\vec{v}_{2,\,i} - \vec{v}_{1,\,i}|} \tag{7}$$

eingeführt werden. Der Impuls ist auch in inelastischen Stößen erhalten!

H 2.1

Als Aufwärmübung, leiten Sie die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem (definiert durch $m_1\vec{v}'_{1i} + m_2\vec{v}'_{2i} = 0$) und im Laborsystem (definiert durch $\vec{v}_{2i} = 0$) her.

H 2.2

Zeigen Sie, dass e aus Gl.(7) in allen Inertialsystemen den gleichen Wert hat.

H 2.3

Zeigen Sie, dass auch Q aus Gl.(6) in allen Intertialsystemen den gleichen Wert hat. *Hinweis:* Impulserhaltung!

H 2.4

Zeigen Sie, dass $e = 1$ impliziert, dass $Q = 0$, d.h. $e = 1$ beschreibt elastische Stöße. *Hinweis:* Benutzen Sie ein geeignetes Intertialsystem!

H 2.6

Betrachten Sie den Fall $e = 0$. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß im Schwerpunkt- und Laborsystem. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass Q in beiden Systemen den selben Wert hat; dazu müssen Sie die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten in den beiden Systemen benutzen.

H 3 Kepler Problem und Rutherford Streuung

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass die Bahn eines Teilchens in einem $1/r$ Potenzial einem Kegelschnitt entspricht, s. Gl.(IV.61):

$$r(\phi) = \frac{\lambda(1+\epsilon)}{1+\cos\phi} \quad \text{mit } \lambda = \frac{L_z^2}{\alpha m(1+\epsilon)} \quad \text{und } \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{\text{tot}}L_z^2}{m\alpha^2}}\,; \tag{8}$$

dabei ist m die Masse des Teilchens, α die Konstante im Potenzial (d.h. $V(r) = \alpha/r$), E_{tot} die Gesamtenergie, und L_z der Drehimpuls (da die Bewegung in der (x, y) statt findet, hat der Drehimpuls nur eine z Komponente). r ist der Abstand des Teilchens vom Ursprung (d.h. dem Kraftzentrum), und ϕ der Winkel in der (x, y) Ebene, d.h. $x = r\cos\phi$.

H 3.1

Illustrieren Sie graphisch (entweder mit Bleistift und Millimeterpapier, oder mit Hilfe eines Plot–Programms), dass $\epsilon = 0.3$ einer Ellipse entspricht, während $\epsilon = 2$ einer Hyperbel entspricht.

H 3.2

Zeigen Sie, dass ein anfänglich bei endlichem r ruhendes Teilchen *nicht* durch Gl.(8) beschrieben ist. Welcher Bahn würde ein solches Teilchen folgen, wenn es punkförmig ist und $V(r) = \alpha/r$ für alle r gilt? Wieso scheitert die Herleitung von Gl.(8) hier? Und was passiert für diese Anfangsbedingung im real existierenden Sonnensystem?

H 3.3

Zeigen Sie, dass für feste Gesamtenergie $E_{\text{tot}} < 0$ der Drehimpuls $|L_z|$ maximal ist, wenn sich das Teilchen auf einer Kreisbahn bewegt.

H 3.4

Für eine abstossende Kraft, $\alpha < 0$, ist stets $E_{\text{tot}} > 0$, d.h. $\epsilon > 1$; das Teilchen folgt somit einer Hyperbel, wobei die Parameter durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 (bei $r \to \infty$) und den Stoßparameter b festgelegt sind; Letzterer kann durch den Streuwinkel θ ausgedrückt werden, s. Gl.(IV.77):

$$b = \frac{|\alpha|}{m v_0^2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) . \tag{9}$$

Bestimmen Sie den Mindestabstand $r_{\min}$ des Teilchens vom Streuzentrum, als Funktion von v_0 und θ für gegebenes m und α. Berechnen Sie den numerischen Wert für die Parameter von Rutherford's Streuexperiment: $\alpha = Z_1 Z_2 e^2/(4\pi\epsilon_0)$, mit $Z_1 = 2,\ Z_2 = 26$, Elementarladung $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C (für Coulomb), Dielektrizitätskonstante des Vakuums $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2 \cdot \text{s}^2/(\text{kg} \cdot \text{m}^3)$, Masse $m = 6.6 \cdot 10^{-27}$ kg, für $\theta = \pi/2$ und $v_0 = 10^4$ km/s. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der (zu Rutherford's Zeit bereits bekannten) typischen Größe eines Atoms, $r_{\text{Atom}} \sim 10^{-10}$ m.

Viel Spaß!