Übung 8

Anwesenheitsaufgaben

Quickies

Q1: Wie ist die Hamilton–Funktion definiert?

Q2: Wie lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen?

Q3: Wie ist der Schwerpunkt $\vec{R}$ eines Systems von N Punktmassen m_i definiert, die sich jeweils am Ort $\vec{r}_i$ befinden?

A 1 Trägheitstensor

In dieser Aufgabe untersuchen wir zunächst einige allgemeine Eigenschaften eines Tensors vom Rang 2, und wenden uns dann dem in der Vorlesung eingeführten Trägheitstensor zu.

A 1.1

Ein Tensor zweiten Ranges $\mathcal{T}$ kann benutzt werden, um eine allgemeine lineare Beziehung zwischen zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zu beschreiben:

$$\vec{v} = \mathcal{T}\vec{u}\,. \tag{1}$$

In kartesichen Koordinaten kann Gl.(1) im Sinne einer Matrix-Multiplikation verstanden werden, d.h. die Komponentenform von Gl.(1) lautet:

$$v_a = \sum_{b=1}^{3} T_{ab} u_b\,. \tag{2}$$

Hier haben wir angenommen, dass die Vektoren in einem drei-dimensionalen Raum definiert sind, T_{ab} ist ein Element von $\mathcal{T}$, und $a,\, b \in \{x, y, z\}$ bezeichnen die drei Koordinaten.

Unter einer Rotation, beschrieben durch die orthogonale 3×3 Matrix $\mathcal{O}$, transformieren Vektoren wie $\vec{v} \to \mathcal{O}\vec{v}$. Zeigen Sie, dass unter der selben Rotation

$$\mathcal{T} \to \mathcal{O}\mathcal{T}\mathcal{O}^{-1} \tag{3}$$

gelten muss, damit Gl.(1) auch im rotierten Bezugssystem gilt. Leiten Sie unter Ausnutzung der Orthogonalität von $\mathcal{O}$ die entsprechende Beziehung für die Elemente T_{ab} ab,

$$T_{ab} \to \sum_{c,d} O_{ac} O_{bd} T_{cd}\,, \tag{4}$$

wobei O_{ab} die Elemente von $\mathcal{O}$ sind. Zeigen Sie schliesslich, dass der Einheitstensor $\mathcal{E}$ invariant unter Rotationen ist. *Hinweis:* Die Elemente des Einheitstensors $E_{ab} = \delta_{ab}$, d.h. als Matrix gelesen ist $\mathcal{E}$ eine 3×3 Einheitsmatrix.

Beachten Sie, dass Gln.(1) und (3) allgemein gültig sind, unabhängig von der Darstellung der Vektoren oder Tensoren; Gln.(2) und (4) gelten in kartesichen Koordinaten.

A 1.2

Der Trägheitstensor $\mathcal{I}$ eines Körpers ist definiert als, s. Gl.(V.22c) aus der Vorlesung:

$$I_{ab} := \int \mathrm{d}^3r \, \rho(\vec{r}) \, (\vec{r}^2 \, \delta_{ab} - r_a \, r_b) \, , \tag{5}$$

wobei $\rho(\vec{r})$ die Massendichte ist. Für N diskrete Punktmassen lautet der entsprechende Ausdruck, s. Gl.(V.22b):

$$I_{ab} := \sum_{i=1}^{n} m_i \, (\vec{r}_i^2 \, \delta_{ab} - r_{ia} \, r_{ib}). \tag{6}$$

Zeigen Sie explizit, dass $\mathcal{I}$ in der Tat wie ein Tensor vom Rang 2 transformiert, wenn $\vec{r} \to \mathcal{O}\vec{r}$.

A 1.3

In der Vorlesung hatten wir auch Rotationen eines starren Körpers um eine *feste* Achse diskutiert; o.B.d.A. kann diese Achse als $z-$Achse gewählt werden. Wir hatten gesehen, dass dann die mit dieser Rotation assoziierte kinetische Energie nur vom Diagonalement I_{zz} des Trägheitstensors abhängt. Zeigen Sie, dass die Elemente I_{zx} und I_{zy} verschwinden, wenn die Rotationsachse eine Symmetrieachse ist, d.h. wenn $\rho(\vec{r})$ invariant ist unter Rotationen um diese Achse. *Hinweis:* Für den Beweis reicht eine viel kleinere Symmetrie aus. Dieses Ergebnis erlaubt in vielen Fällen, die Hauptachsen eines Körpers zu erraten; im Hauptachsensystem ist $\mathcal{I}$ diagonal.

A 1.4

Nun wollen wir uns überlegen was passiert, wenn $I_{zx} \neq 0$ und/oder $I_{zy} \neq 0$, d.h. wenn der Körper eine *Unwucht* hat. Zeigen Sie dazu zunächst, dass die mit der Rotation um die $z-$Achse assoziierte Beschleunigung des $i.-$ten Massenpunktes gegeben ist durch $\vec{a}_i = -m_i \vec{r}_{\perp,i} \omega^2$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist und $\vec{r}_{\perp,i}$ die Komponenten des Ortsvektors in der (x, y) Ebene (d.h. senkrecht zur Rotationsachse) beinhaltet. Leiten Sie daraus her, dass das auf die Rotationsachse ausgeübte totale Drehmoment gegeben ist durch

$$\vec{N} = \omega^2 \, (I_{zx} \vec{e}_y - I_{zy} \vec{e}_x) \, , \tag{7}$$

wobei $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ die Einheitsvektoren in $x-$ bzw. $y-$Richtung sind. Eine Unwucht versucht also, die Drehachse zu verbiegen.

A 1.5

Zum Abschluss dieser Aufgabe wollen wir die Haupt Trägheitsmomente (I_1 , I_2 und I_3) einiger Körper berechnen. Wir legen den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers. Betrachten Sie:

- Ein Molekül aus zwei Atomen mit den Massen m_1 und m_2 und Abstand l. Zeigen Sie, dass

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 \, m_2}{m_1 + m_2} \, l^2 \quad \text{und} \quad I_3 = 0 \tag{8}$$

  sind, wenn das Molekül auf die z-Achse gelegt wird.

- Ein Molekül aus drei Atomen (davon zwei gleiche), die an den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe h und der Basislänge a angeordnet sind (d.h. die beiden identischen Atome haben Abstand a); Beispielsweise H_2O oder CO_2.

- Ein Zylinder mit konstanter Massendichte ρ, Höhe h und Radius R. Zeigen Sie, dass

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{4}\,(R^2 + \frac{1}{3}\,h^2) \quad \text{und} \quad I_3 = \frac{M}{2}\,R^2 \tag{9}$$

gilt, wobei M die Masse des Zylinders ist und die $z-$Achse entlang der Symmetrieachse des Zylinders liegt.

Hausaufgaben (Abgabe: 27. 6 .2026)

H 1 Geschwindigkeitsabhängiges Potenzial

Betrachten Sie in kartesischen Koordinaten das verallgemeinerte Potenzial

$$U(\vec{r}, \vec{v}) = -Q\,\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{v}, \tag{10}$$

wobei $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ und Q ein Konstante sind. Der Vektor $\vec{A}$ soll keine explizite Zeitabhängigkeit haben. (In der Magnetostatik ist $\vec{A}$ das Vektorpotenzial.) *Hinweis:* $\partial\vec{A}/\partial t = 0$ impliziert im allgemeinen nicht $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t = 0$!

H 1.1

Zeigen Sie ausgehend von der Komponentengleichung

$$F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial v_i} - \frac{\partial U}{\partial r_i}, \tag{11}$$

dass sich für die zum verallgemeinerten Potenzial U gehörende Kraft folgender Audruck ergibt:

$$\vec{F} = Q\,\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\,. \tag{12}$$

H 1.2

Stellen Sie die Lagrangefunktion und die ELGen für ein Teilchen mit der Masse m auf, dass diesem verallgemeinerten Potenzial U unterliegt.

H 1.3

Berechnen Sie den kanonisch konjugierten Impuls $\tilde{\vec{p}}$ und zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion die folgende Form hat:

$$H = \frac{(\tilde{\vec{p}} - Q\,\vec{A})^2}{2m}\,. \tag{13}$$

H 1.4

Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie, dass sie dasselbe Ergebnis wie die ELGen liefern.

H 1.5

Wieso ist hier die Gesamtenergie gleich der kinetischen Energie, $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}}$?

H 2: Runge-Lenz-Vektor

In der Bewegung eines Teilchens in einem $1/r$ Potenzial gibt es eine weitere Erhaltungsgröße, den sog. Runge-Lenz-Vektor. Sei m die Masse unseres Probeteilchens, und $V(r) = -\alpha/r$ mit konstantem α, s. Gl.(IV.51).

H 2.1

Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$, gegeben durch

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \frac{\vec{r}}{r} \tag{14}$$

erhalten ist. Dabei ist $\vec{r}$ der Ort des Teilchens (relativ zum Kraftzentrum), $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ der lineare Impuls, und $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ der Drehimpuls. *Hinweis:* Beachten Sie, dass $\vec{r}$ hier ein Vektor ist, d.h. wir betrachten ein zwei-dimensionales System (da sich die Bewegung aufgrund der Erhaltung des Drehimpulses in einer Ebene abspielt), mit $\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V$. Eine Herleitung benutzt die $bac - cab$ Regel angewandt auf den 1. Term in Gl.(14).

H 2.2

Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ in der Ebene der Bahnkurve liegt, d.h. $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$.

H 2.3

Zeigen Sie, dass $\vec{A}^2 = 2mE_{\text{tot}}\vec{L}^2 + m^2\alpha^2$, d.h. die Erhaltung von $|\vec{A}|$ folgt aus der Erhaltung der Gesamtenergie E_{tot} und des Drehimpulses.

H 2.4

Verwenden Sie $\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{A}| r \cos\phi$ sowie die Definition von $\vec{A}$ in Gl.(14) um zu zeigen, dass der Abstand r geschrieben werden kann als

$$r(\phi) = \frac{\rho}{1 + \epsilon \cos\phi}\,, \tag{15}$$

wobei ρ und ϕ Konstanten sind.

H 3: Trägheitsmomente

In Fortsetzung von **A 1.5** wollen wir einige weitere Trägheitsmomente berechnen:

H 2.1

Ein Kreiskegel mit Höhe h und Radius R der Grundfläche, wobei die $z-$Achse wieder entlang der Symmetrieachse liegt.

H 3.2

Eine Kugel mit Radius R.

Viel Spaß!