Übung 9

Anwesenheitsaufgaben

Quickies

Q1: Wieviele kinematische Variable braucht man, um den Endzustand in einem elastischen Stoß zu beschreiben, wenn die Geschwindigkeiten der stoßenden Körper im Anfangszustand bekannt sind? Geben Sie eine explizite Beschreibung in einem geeigneten Koordinatensystem.

Q2: Geben Sie zwei Gründe an, warum Keplers Gesetze in unserem Sonnensystem nicht exakt gelten. *Hinweis:* Die Newton'sche Mechanik wird als korrekt angenommen, d.h. Sie sollen nicht mit der Relativitätstheorie argumentieren.

Q3: Geben Sie (mindestens) drei verschiedene Arten von Scheinkräften an, die ein Beobachter in einem beschleunigten Bezugssystem spüren kann.

A 1 Rotierendes Massenpaar

Wir betrachten zwei identische punktförmige Massen m, die sich an den Enden eines masselosen, starren Stabs der Länge ℓ befinden. Der Stab rotiert um seinen Mittelpunkt, wobei die konstante Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ einen Winkel θ zur Achse des Stabes hat, die wir mit der $z-$Achse identifizieren.

A 1.1

Zeigen Sie, dass im Hauptachsensystem $I_3 \equiv I_{zz} = 0$, während $I_1 = I_2 = m\ell^2/2$.

A 1.2

Wir wählen die $y-$Achse senkrecht zu $\vec{\omega}$. Zeigen Sie, dass dann $\omega_x = \omega \sin\theta,\ \omega_z = \omega\cos\theta$, mit $\omega = |\vec{\omega}|$.

A 1.3

Benutzen Sie die Euler–Gleichungen, Gln.(V.66) in der Vorlesung, mit $\dot{\omega}_a = 0$, um zu zeigen, dass Drehmomente $N_1 = N_3 = 0$, während

$$N_2 = \frac{1}{4} m\ell^2 \sin(2\theta)\,.$$

Wieso ist das mit der in der Vorlesung gemachten Aussage kompatibel, dass für verschwindenes Drehmoment $\vec{N}$ eine konstante Rotation ($\dot{\vec{\omega}} = 0$) nur um eine Hauptachse möglichh ist?

A 2 Schaukelnder Halbzylinder

Betrachten Sie die Schaukelbewegung eines homogenen Halbzylinders mit Radius R und Masse M auf einer horizontalen Ebene (siehe Abbildung 1). Der Zylinder kann rollen ohne zu gleiten, ansonsten ist die Reibung zu vernachlässigen. Es wirkt nur die Schwerkraft.

A 2.1

Finden Sie den Schwerpunkt S des Halbzylinders und drücken Sie die Schwerpunktskoordinaten durch den in der Skizze angegebenen Winkel φ aus.

A 2.2

Zeigen Sie, dass das für die Rollbewegung relevante Trägheitsmoment I_S des Halbzylinders bezüglich S gegeben ist durch

$$I_S = MR^2\,(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2})\,. \tag{1}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst das Trägheitsmoment bezüglich P und verwenden Sie den Satz von Steiner.

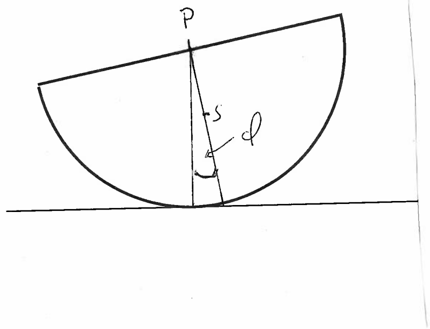

Abbildung 1: Skizze schaukelnder Halbzylinder. In der gezeigten Schnittebene ist P der Mittelpunkt des Halbkreises, S der Schwerpunkt, und ϕ der Auslenkungswinkel aus der Ruhelage.

A 2.3

Berechnen Sie die kinetische Energie. *Hinweis:* Erinnern Sie sich an die Zerlegung von $E_{\rm kin}$ in einen Beitrag von der Translationsbewegung des Schwerpunktes und einen Beitrag von der Rotation um den Schwerpunkt. Die Translationsbewegung des Schwerpunkts S lässt sich aus der des Mittelpunkts P berechnen.

A 2.4

Bestimmen Sie die Lagrangefunktion. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für den Winkel φ wie folgt lautet:

$$\ddot{\varphi}\,(9\pi - 16) + 8\frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \tag{2}$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Winkel φ klein ist, sodass Sie Terme von der Ordnung $\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$ und von der Ordnung φ^3 in der Lagrangefunktion vernachlässigen können.

A 2.5

Berechnen Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$.

Hausaufgaben (Abgabe: 4. 7. 2026)

Beide Aufgaben befassen sich mit beschleunigten Bezugssystemen.

H 1 Das Foucaultsche Pendel

An einem Ort P auf der Erde ist ein Pendel mit Massepunkt m und Fadenlänge l aufgehängt. Der Polarwinkel von P relativ zur Achse Erdmittelpunkt-Nordpol sei θ. Wählen Sie ein mit der Erde rotierendes Koordinatensystem S', dessen Ursprung der Erdmittelpunkt ist, dessen z'-Achse durch P nach oben geht und dessen $x'-$Achse parallel zur Südrichtung im Punkt P liegt. (Hinweis: Dies ist *nicht* das System S', das zur Diskussion der Bwewebungen nahe der Erdoberfläche in der Vorlesung eingeührt wurde!) Auf die Masse m wirkt die Schwerkraft $\vec{F}_G = -mg\hat{e}'_z$.

H 1.1

Zeigen Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation $\vec{\omega}$ in den Koordinaten des mitrotierenden Koordinatensystems S' gegeben ist durch

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} -\omega \sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix} . \tag{3}$$

H 1.2

Zeigen Sie, dass für kleine Pendelbewegungen der Masse m um die Ruhelage die potenzielle Energie die Form

$$V'(x', y') = \frac{mg}{2l}\,(x'^2 + y'^2) + \text{konst.} \tag{4}$$

hat. Hierbei wird der Beitrag der Zentrifugalkraft als konstant angenommen, da sich die Position des Pendels bezüglich des Erdmittelpunkts auf Grund der Pendelauslenkung kaum verändert.

H 1.3

Stellen Sie die Lagrangefunktion in einem nicht rotierenden Bezugssystem S'' auf, das die Rotation um die z'-Achse mit $\omega'_z = \omega\cos\theta$ nicht berücksichtigt. Transformieren Sie diese Lagrangefunktion dann in das rotierende Koordinatensystem S'. Die Geschwindigkeit transformiert dann wie folgt:

$$\dot{\vec{r}}'' = \dot{\vec{r}}' + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix} \times \vec{r}' . \tag{5}$$

Warum ändert sich die Form des Potentials $V' = V''$ nicht? Vernachlässigen Sie im Folgenden die ω^2-Terme, da $\omega = 2\pi/(24\cdot 3600\,\text{s})$ relativ klein ist. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen wie folgt geschrieben werden können:

$$\ddot{x}' = 2\,\omega\,\cos\theta\,\dot{y}' - \frac{g}{l}x' \tag{6}$$

$$\ddot{y}' = -2\,\omega\,\cos\theta\,\dot{x}' - \frac{g}{l}y' \tag{7}$$

`Hinweis:` Die Terme $\propto \dot{x}, \dot{y}$ beschreiben den Effekt der Corioliskraft.

H 1.4

Lösen Sie die obigen Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Substitution $u = x' + iy'$ und dem Ansatz $u = A\exp(\lambda t)$, wobei t die Zeit ist und A und λ komplexe Konstanten sind.

H 2 Beitrag der Fliehkraft zu den Gezeiten

In Kapitel VI wird u.a. der Beitrag der Gravitationskraft zu den Gezeiten berechnet. Die durch die Bewegung der Himmelskörper um den gemeinsamen Schwerpunkt verursachte Fliehkraft trägt ebenfalls bei. Hier wollen wir das am Beispiel des Erde–Mond Systems betrachten.

H 2.1

Der Schwerpunkt des Erde–Mond Systems liegt offensichtlich auf der Linie, die die Zentren der beiden Himmelskörper verbindet. Berechnen Sie den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Erde; benutzen Sie dabei $m_{\text{Mond}} \simeq 0.012 M_{\text{Erde}}$, Abstand Mond–Erde $\simeq 60$ Erdradien.

H 2.2

Zeigen Sie, dass die durch die Bewegung der Erde um den Mittelpunkt des Erde–Mond Systems verursachte Fliehkraft auf die Testmasse m gegeben ist durch

$$\vec{F}_F(\vec{r}) = -m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S)] \ . \tag{8}$$

Dabei ist $\vec{r}$ der Vektor vom Erdmittelpunkt zum Punkt auf der Erdoberfläche, an dem sich die Testmasse befindet, und $\vec{r}_S$ zeigt zum Schwerpunkt des Erde–Mond Systems. Vergleichen Sie diese Kraft mit der durch die Erdrotation ausgeübte Fliekraft. *Hinweis:* Die Bahn der Erde (und des Mondes) kann als Kreisbahn mit $\vec{\omega}$ =konst. angenommen werden. Die Bahn des Mondes liegt i.W. in der Ebene des Erdäquators.

H 2.3

Zeigen Sie, dass die Kraft (8) qualitativ den gleichen Effekt hat wie die in der Vorlesung berechnete gravitative Gezeitenkraft, dass dieser Beitrag aber für den dem Mond fernsten und den dem Mond nähsten Punkt auf der Erdoberfläche unterschiedlich große Beträge hat.

Viel Spaß!