# Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html
Abgabe: 10.04.2023

## Hausaufgaben

Die folgenden Rechenübungen sollen einen Überblick darüber geben, was im Idealfall an Rechenkenntnissen vorhanden sein sollte.

### H 1 Ableitungen und Vektorprodukte

Zeige die folgenden Gleichungen:

(a)
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}) = 2\ \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} \tag{1}$$

(b)
$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) = \vec{x} \times \ddot{\vec{x}} \tag{2}$$

(c)
$$\frac{d}{dt}\,|\vec{x}| = \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|} \tag{3}$$

(d)
$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = -\frac{\vec{x} \times (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})}{|\vec{x}|^3} \tag{4}$$

### H 2 Totale und partielle Ableitungen

Gegeben sei das Funktional $H(q(t), p(t), t)$, wobei die ersten beiden Variablen von der dritten abhängen.

(a) Zeige, dass für die totale Ableitung gilt:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{5}$$

(b) Es sei nun $H = p^2 + tq^2$ mit $q(t) = t$ und $p(t) = t^2$ gegeben. Berechne $\frac{dH}{dt}$ durch Einsetzen von $q$ und $p$ und vergleiche dies mit dem Ergebnis von Gleichung 5.

(c) Betrachte als weiteres Beispiel das Funktional $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ und zeige:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{6}$$

(d) Was sind die totalen Differentiale $dH$ und $dL$ von $H$ und $L$?

(e) Die Energie eines Teilchens der Masse $m$ zur Zeit $t$ im konservativem Kraftfeld $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = m\ddot{\vec{r}}$ ist

$$E(t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}(t)^2 + V(\vec{r}(t)) = \frac{m}{2}(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + V(x(t), y(t), z(t)). \tag{7}$$

Berechne $\frac{dE}{dt}$. Was folgt daraus für die Erhaltung der Energie?

## H 3 Bahnkurve in Zylinderkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten des Ortsvektors $\vec{r}$ lassen sich wie folgt in Zylinderkoordinaten schreiben:

$$\vec{r}(x,y,z) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z = \vec{r}(\rho,\varphi,z)$$

(a) Berechne die Einheitsvektoren

$$\hat{e}_\rho = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right|}, \quad \hat{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|}, \quad \hat{e}_z = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|}$$

in Zylinderkoordinaten und zeige, dass diese ein Orthonormalsystem bilden (d.h. $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $i = \rho, \varphi, z$ gelten).

(b) Der Vektor $\vec{r}(t)$ beschreibt die Bahn eines punktförmigen Teilchens als Funktion der Zeit $t$. Berechne die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens in Zylinderkoordinaten. Drücke die Ergebnisse durch die Vektoren $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\varphi$ und $\hat{e}_z$ aus.

## H 4 Bahnkurve in Kugelkoordinaten

Wiederhole Aufgabe H 3 für die Kugelkoordinaten $r, \phi$ und $\theta$. Hierbei gilt:

$$\vec{r}(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Viel Spaß!