Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html
Abgabe: 19.06.2023

Quickies

- Wie viele Erhaltungsgrößen hat das Kepler-Problem?
- Welche sind dies?
- Wie lautet die Hamilton-Funktion?
- Wie lauten die Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus?
- Wie lauten die Keplerschen Gesetze?
- Wann ist der Drehimpuls erhalten?

Anwesenheitsaufgaben

A 1 Trägheitsmomente

Ein starrer Körper mit der Massendichte ρ hat den Trägheitstensor

$$I_{ij} := \int dV\, \rho(\vec{x})\, (\vec{x}^2\, \delta_{ij} - x_i\, x_j) \tag{1}$$

mit i, $j = 1, 2, 3$. Bei den folgenden Körpern wird die Dichte als konstant, also $\rho(\vec{x}) = \rho = konst.$ angenommen. Wenn der starre Körper durch n Massenpunkte beschrieben wird, dann ist der Trägheitstensor entsprechend

$$I_{ij} := \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha\, (\vec{x}_\alpha^2\, \delta_{ij} - x_{\alpha i}\, x_{\alpha j}). \tag{2}$$

Hierbei besitzt der Massenpunkt α die Masse m_α. Bestimme die Hauptträgheitsmomente $I_i := I_{ii}$ folgender Körper, wobei der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems im Schwerpunkt liegt:

(a) Ein Molekül aus zwei Atomen mit den Massen m_1 und m_2 und Abstand l. Zeige, dass

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, l^2 \quad \text{und} \quad I_3 = 0 \tag{3}$$

sind, wenn das Molekül auf die z-Achse gelegt wird.

(b) Ein Molekül aus drei Atomen (davon zwei gleiche), die an den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe h und der Basislänge a angeordnet sind.

(c) Ein Zylinder mit Höhe h und Radius R mit der Symmetrieachse in z-Richtung. Zeige, dass

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{4}\, (R^2 + \frac{1}{3}\, h^2) \quad \text{und} \quad I_3 = \frac{M}{2}\, R^2 \tag{4}$$

gilt, wenn M die Masse des Zylinders ist.

(d) Ein Kreiskegel mit Höhe h und Radius R der Grundfläche.

(e) Eine Kugel mit Radius R.

Hausaufgaben

In der ersten Aufgabe wird der Runge-Lenz-Vektor als eine praktische Erhaltungsgröße im Keplerproblem betrachtet. Danach soll der differentielle Wirkungsquerschnitt für ein Streuproblem berechnet werden. Die letzte Aufgabe behandelt den inelastischen Stoß.

H 1 Runge-Lenz-Vektor

Bei der Behandlung des Keplerproblems für zwei Massenpunkte m_1 und m_2 im Potenzial $V(r) = k/r$ mit $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ und $k = konst.$ sind Erhaltungsgrößen wichtig. Eine davon ist der so genannte Runge-Lenz-Vektor, mit dem z.B. Bahnkurven bestimmt werden können.

(a) Zeige, dass der Runge-Lenz-Vektor

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + \mu k \frac{\vec{r}}{r} \tag{5}$$

eine Erhaltungsgröße ist, wobei $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ der Abstandsvektor, $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$ der Impulsvektor, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ der Drehimpulsvektor und $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse sind. Hinweis: $\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V$

(b) Zeige, dass der Runge-Lenz-Vektor in der Bewegungsebene liegt, d.h. dass $\vec{L} \cdot \vec{A} = 0$ gilt (denn $\vec{L}$ ist konstant).

(c) Zeige, dass $A^2 = \vec{A}^2 = 2\,\mu\, L^2\, E + \mu^2\, k^2$ ist. Hierbei sind $L = |\vec{L}|$ der Drehimpuls und die E Gesamtenergie.

(d) Verwende $\vec{r} \cdot \vec{A} = r\, A\, \cos\phi$, wobei ϕ der von $\vec{r}$ und $\vec{A}$ eingeschlossene Winkel ist, um zu zeigen, dass für $k < 0$ der Abstand r durch einen Kegelschnitt gegeben ist:

$$r(\phi) = \frac{\rho}{1 + \epsilon\, \cos\phi} \tag{6}$$

Dabei sind ρ der Halbparameter und ϵ die Exzentrizität einer Ellipse. Welche Bedeutung hat der Runge-Lenz-Vektor geometrisch?

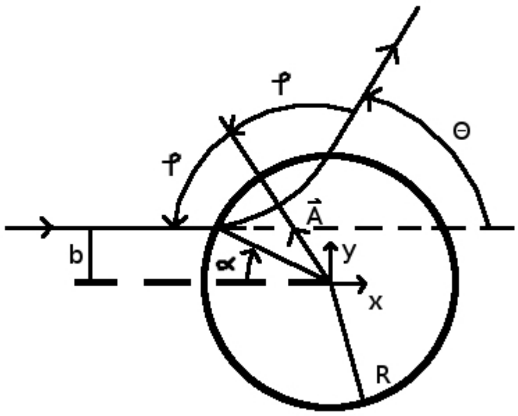

Abbildung 1: Ein Streuproblem

H 2 Ein Streuproblem

In dieser Aufgabe berechnen wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für Teilchen der Masse m im "abgeschnittenen Coulombpotenzial":

$$V(r) = \begin{cases} k(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) & \text{für} \quad r \leq R \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases} \tag{7}$$

Hierbei sind die Parameter k und R konstant. Die Teilchen fallen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ ein (siehe Abbildung 1).
Zur Erinnerung: Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ kann wie folgt definiert werden:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \frac{\text{Zahl der pro Sekunde in den Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Intensität der einfallenden Teilchen}}$$

Die Einheit des Wirkungsquerschnitts ist eine Fläche und wird in der Kernphysik aufgrund der kleinen Werte praktischerweise in Einheiten $1\,\mathrm{b} = 1\,\mathrm{barn} = 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$ ausgedrückt. Da das Potential $V(r)$ nur vom Abstand r abhängt und die Anzahl der gestreuten Teilchen gleich der Anzahl der einfallenden Teilchen ist, kann gezeigt werden, dass

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{8}$$

gilt, wobei b der Stoßparameter und θ der Streuwinkel sind.

(a) Da das System rotationssymmetrisch ist, ist der Drehimpuls erhalten. Stelle den Drehimpusvektor $\vec{L}$ auf und zeige, dass er gegeben ist durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -mvb\hat{e}_z \tag{9}$$

mit dem Betrag der Geschwindigkeit v und dem Basis-Einheitsvektor $\hat{e}_z$.

(b) Betrachte den Runge-Lenz-Vektor $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L}/k + \vec{r}/r$ (im Vergleich zur obigen Definition wird hier durch die Masse und k geteilt). Gib den Runge-Lenz-Vektor in der Form $\vec{A} = a\hat{e}_x + b\hat{e}_y + c\hat{e}_z$ an.

(c) Zeige nun, dass $|\vec{A}|^2$ mit der Gesamtenergie E gegeben ist durch:

$$|\vec{A}|^2 = 1 + \frac{4E}{kR}b^2 + \frac{4E^2}{k^2}b^2. \tag{10}$$

Nutze dazu, dass das Teilchen außerhalb des Potentials frei ist.

(d) Benutze $A_x = \cos\varphi\,|\vec{A}|$ mit $2\,\varphi + \theta = \pi$ und zeige, dass für den Stoßparameter

$$b^2 = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{R^2} + 4E\,\frac{k+ER}{k^2R}\,\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{11}$$

gilt.

(e) Nutze nun Gleichung (8), um den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ zu berechnen. Zeige auch, dass dieser für $\lim R \to \infty$ in die Rutherfordsche Streuformel übergeht.

H 3 Inelastischer Stoß

Bei elastischen Stößen sind der Impuls sowie die kinetische Energie erhalten. Bei inelastischen Stößen hingegen ändert sich die Energie der beiden Stoßpartner derart, dass

$$E_{kin,\,i} = E_{kin,\,f} + Q \tag{12}$$

erfüllt ist. Die Indizes i und f bezeichnen hierbei den Anfangs- und Endzustand. Für $Q > 0$ absorbieren die Reaktionspartner Energie (z.B. durch Aufwärmung), während sie für $Q < 0$ Energie abgeben (z.B. kann bei Kernreaktionen ein angeregter Zustand in den Grundzustand übergehen). Zur Beschreibung inelastischer Stöße kann auch alternativ der Koeffizient

$$e = \frac{|\vec{v}_{2,\,f} - \vec{v}_{1,\,f}|}{|\vec{v}_{2,\,i} - \vec{v}_{1,\,i}|} \tag{13}$$

eingeführt werden.

(a) Zeige, dass e in allen Inertialsystemen den gleichen Wert hat.

(b) Was ist die Beziehung zwischen e und Q? Zeige insbesondere, dass für $Q = 0$, also bei elastischen Streuungen, $e = 1$ folgt.

(c) Betrachte den Fall $e = 0$. Berechne die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß im Schwerpunkt- und Laborsystem sowie den Wert von Q. In welchem System ist Q größer?

Viel Spaß! :)