Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html
Abgabe: 17.04.2023

Anwesenheitsaufgaben

Die erste Aufgabe ist eine kurze Einführung der Drehmatrix, die zum Wechsel des Intertialsystems in der (Newtonschen) Mechanik verwendet werden kann. Der ε-Tensor, der in den folgenden Aufgaben vorgestellt wird, ist ein sehr nützliches mathematisches Hilfsmittel, welches lange umständliche Rechnungen erheblich verkürzen kann.

A 1 Drehmatrix

Sei O eine orthogonale Matrix, d.h. $O\,O^T = \mathbb{1}$. Die Anwendung von O ändert weder die Länge eines Vektors noch den Winkel zwischen zwei Vektoren, d.h. $|O\,\vec{a}| = |\vec{a}|$ und $(O\,\vec{a}) \cdot (O\,\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta$, wobei θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

Dieses wollen wir uns an einem einfachen Beispiel veranschaulichen. Sei R eine 2×2 − Matrix mit

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dies ist die Drehmatrix in zwei Dimensionen (Drehung um den Winkel α) wie wir im Folgenden sehen werden.

(a) Mache Dir klar, dass $R(\alpha)$ eine Orthogonalmatrix ist. Zeige, dass sich die Länge eines Vektors und der Winkel zwischen zwei Vektoren bei Anwendung von $R(\alpha)$ nicht verändert.

(b) Überzeuge Dich davon, dass $R(\alpha)$ eine Drehung um den Winkel α beschreibt. Wie sieht die Verallgemeinerung von $R(\alpha)$ für drei Raumdimensionen aus?

(c) Was ist der Wert der Determinante von $R(\alpha)$? Welche Werte kann die Determinante einer Orthogonalmatrix annehmen?

A 2 Indexschreibweise für Skalar- und Kreuzprodukt

Der total antisymmetrische ε-Tensor wird definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad i,j,k \text{ eine gerade Permutation von } 1,2,3 \text{ bilden,} \\ -1 & \text{wenn} \quad i,j,k \text{ eine ungerade Permutation von } 1,2,3 \text{ bilden,} \\ 0 & \text{wenn} \quad \text{zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Das Kronecker-Symbol δ_{ij} ist definiert durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Folgenden wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, gemäß der über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist. Beispielsweise wird $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$ statt $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{e}_i$ geschrieben, wobei a_i die i-te Komponente des Vektors $\vec{a}$ und $\hat{e}_i$ der i-te Einheitsvektor sind.

(a) Zeige $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i\, b_i$ und $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.

(b) Zeige $\varepsilon_{ijm}\, \varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\, \delta_{jl} - \delta_{il}\, \delta_{jk}$, $\varepsilon_{ijm}\, \varepsilon_{kjm} = 2\, \delta_{ik}$, und $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijk} = 6$.

(c) Leite nun mit Hilfe der vorherigen Teilaufgaben die so genannte “Bac-Cab-Regel” her:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{2}$$

Zeige weiterhin, dass $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ gilt.

(d) Wie kann das Kreuzprodukt $(\vec{b} \times \vec{c})$ durch eine Determinante ausgedrückt werden? Zeige weiterhin die folgende Gleichung, wobei a_i, b_i und c_i die kartesischen Koordinaten der Vektoren sind:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Hausaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele zum Lösen von einfachen Differentialgleichungen.

H 1 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Betrachte einen gedämpften harmonischen Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = 0. \tag{4}$$

Die Anfangsbedingungen bei $t = 0$ seien x_0 und v_0. Finde $x(t)$ für die Fälle $w_0 > \gamma$ und $w_0 < \gamma$. Zeige ebenso, dass $ax_1(t) + bx_2(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen sind. Welche Eigenschaft der Bewegungsgleichung bewirkt dies?

H 2 Fallendes Seil

Ein ausgestrecktes Seil mit der Masse m und der Länge l gleitet über eine Tischkante ab. Die Reibung sei vernachlässigbar und das Seil soll Biegungen keinen Widerstand entgegensetzen. (Hinweis: Zu einem bestimmten Zeitpunkt kann ein Stück des Seils offensichtlich über die Tischkante hinabhängen während der restliche Teil noch auf dem Tisch liegt.)

(a) Skizziere das Problem und stelle die Bewegungsgleichung auf.

(b) Zeige mit Hilfe der Bewegungsgleichung, dass die Energie $E(x, \dot{x})$ erhalten ist. (Hinweis: Nimm die Tischhöhe als Nullpunkt der potentiellen Energie an.)

(c) Löse die Bewegungsgleichung für den Fall, dass das Seil zur Zeit $t = 0$ losgelassen wird, wobei ein Stück x_0 vom Tisch herabhängt. Mache Dir dabei die Energieerhaltung zu nutze, d.h. löse zunächst $E(x)$ nach $\dot{x}$ auf und integriere dann. (Hinweis: Setze $E(t) = E(0) = const.$ ein)

H 3 Pfeil und Bogen

Ein Bogenschütze spannt einen Pfeil in seinen Bogen und hält inne. Bevor er den Pfeil loslässt, möchte er abschätzen, mit welcher Geschwindigkeit v der Pfeil mit der Masse m den Bogen mit der "Bogenkonstante" k, den er um die Strecke d gespannt hat, verlassen wird.

(a) Mache eine Skizze, formuliere die Anfangsbedingungen und stelle die Bewegungsgleichung auf.

(b) Finde die Geschwindigkeit v durch Separation der Variablen (Hinweis: v, x) und Integrieren der Bewegungsgleichung. Vergleiche mit dem Energieerhaltungssatz.

(c) Versuche nun die Geschwindigkeit mit einer so genannten "Dimensionsanalyse" abzuschätzen, d.h. mache den Ansatz

$$v = f(m, k, d) = m^\alpha k^\beta d^\gamma \tag{5}$$

und bestimme unter Berücksichtigung der Dimensionen (sprich Einheiten) von m, k, d und v die Potenzen α, β und γ. Vergleiche dies mit dem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe. Funktioniert diese Methode immer?

Viel Spaß!