Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html
Abgabe: 01.05.2023

Anwesenheitsaufgaben

In der ersten Aufgabe werden die Eigenschaften einer Gruppe anhand der Galilei-Transformation betrachtet. Die zweite Aufgabe stellt die Taylorreihe vor, mit welcher Funktionswerte genähert werden können (Dies geschieht z.B. bei der Betrachtung von kleinen Auslenkungen eines Pendels).

A 1 Galilei-Transformation

Der Wechsel des Intertialsystem in der Newtonschen Mechanik kann durch eine Galilei-Transformation beschrieben werden:

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}\,' = R\,\vec{x} + \vec{v}\,t + \vec{a} \qquad \text{und} \qquad t \mapsto t' = t + t_0 \tag{1}$$

R ist eine orthogonale Matrix, es gilt also $R^T = R^{-1}$.

(a) Für welche $R,\ \vec{v}$ und $\vec{a}$ ist Gleichung (1) keine Galilei-Transformation, d.h. keine Transformation zwischen zwei Inertialsystemen? (Hinweis: Was muss für $\ddot{\vec{x}}\,'$ in einem Inertialsystem erfüllt sein?)

(b) Wie lautet die Definition einer Gruppe? Wann ist sie abelsch?

(c) Weise die Gruppeneigenschaften für die Galilei-Transformation nach.

(d) Werden sich die Wege eines Frachters und eines Piratenbootes im indischen Ozean kreuzen? Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind die Ortskoordinaten des Frachters $\vec{x}_1(0) = (60,\, 10)$, wobei als erste Komponente der Längengrad und als zweite Komponente der Breitengrad in Grad angegeben wird. Er bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = (-2,\, -12)$, wobei sie in Grad pro Tag angeben wird (Die Erdkrümmung wird nicht weiter berücksichtigt und die Breitengrade unterhalb des Äquators und die Längengrade westlich von Greenwich (einer Sternwarte in London) werden als negativ angenommen. Längen und Breitengrade werden wie ein kartesisches Koordinatensystem behandelt, wobei der Längengrad der "x-Achse" und der Breitengrad der "y-Achse" zugeordnet wird.). Das Piratenboot hat die Position $\vec{x}_2(0) = (50,\, 5)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = (3,\, -19/2)$. Muss die Mannschaft des Frachters den Kurs ändern? Beantworte die Frage durch die Anwendung einer Galilei-Transformation.

A 2 Taylorreihe I

Betrachte die Entwicklung einer reellen Funktion f in eine Potenzreihe

$$f(x) = a_i x^i \tag{2}$$

mit den Koeffizienten a_i und der Summenkonvention $i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$.

(a) Angenommen, eine Funktion f lasse sich durch die Entwicklung (2) darstellen. Was gilt dann für die Koeffizienten, wenn f gerade $[f(x) = f(-x)]$ bzw. ungerade $[f(x) = -f(-x)]$ ist?

(b) Nimm an, dass alle n-ten Ableitungen $f^{(n)}(x)$, $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$, nur an der Stelle $x = 0$ bekannt seien. Bestimme nun die Koeffizienten a_i in Gleichung (2). (Hinweis: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$)

(c) Inwiefern kann man eine Taylorreihe bei kleinen Auslenkungen eines Pendels benutzen?

Hausaufgaben

Die erste Aufgabe dient der Übung zur Berechnung von Taylorreihen. Aufgabe 2 behandelt eine nicht konservative Kraft. Aufgabe 3 und 4 zeigen die Vorteile des Lagrange-Formalismus.

H 1 Taylorreihe II

(a) Entwickle die folgenden Funktionen mit einer Taylorreihe um $x = 0$:

$$\cos(x), \quad \sin(x), \quad e^x, \quad 1/(1-x) \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x} \tag{3}$$

(b) Beweise mit Hilfe der Taylorreihe die Eulersche Formel $\exp(i\,\varphi) = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$, wobei φ reell ist.

H 2 Fallschirmsprung

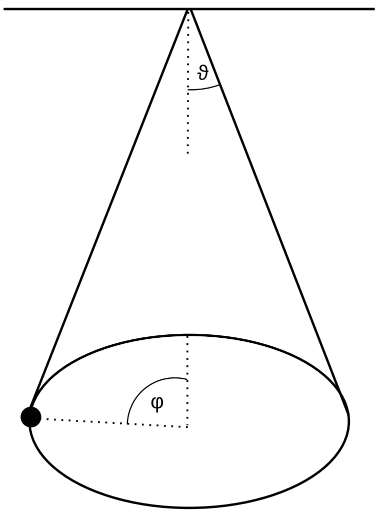
Ein Fallschirmspringer der Masse m springt zur Zeit $t = 0$ aus einem Flugzeug. Mit Erreichen seiner Grenzgeschwindigkeit im freien Fall $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t)$ kann der Koeffizient c seiner Luftreibung $F = c\,v^2$ bestimmt werden.

(a) Stelle die Bewegungsgleichung auf und berechne den Luftreibungskoeffizienten c als Funktion der Grenzgeschwindigkeit v_∞. Vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis einer Dimensionsanalyse.

(b) Löse nun die Bewegungsgleichung durch Einsetzen von v_∞, Separation der Variablen und anschließenden zweimaligen Integrieren.

H 3 Pendel III

Betrachte wieder das Pendel aus dem 3. Zettel. Benutze dieses mal den Lagrange-Formalismus. Die Masse sei m und die länge des Fadens $l =$ konstant.



(a) Leite einen Ausdruck für die kinetische Energie T und potentielle Energie V in Abhängigkeit von θ, $\dot{\theta}$, ϕ und $\dot{\phi}$ her. Zeige das sich daraus die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) - mgl(1 - cos\theta)$$

ergibt.

(b) Welche Variable taucht in L nicht explizit auf? Nutze die Lagrange-Gleichung um die zugehörige Erhaltungsgröße zu finden.

(c) Nutzte jetzt die Euler-Lagrange-Gleichungen um die Bewegungsgleichung von θ zu finden.

(d) Fall 1: Zeige das mit $\phi = \phi_0$ und $\dot{\phi} = 0$ das Ergebnis aus aus dem letzten Zettel reproduziert wird.

(e) Fall 2: Nutze nun $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0\ \forall t$. Finde nun die Kreisfrequenz der Schwingung. Integriere dazu $\dot{\phi}$ für eine Periodendauer.

(f) Jetzt betrachten wir was für Fall 2 passiert, wenn das Pendel einen infinitesimalen Stoß in θ-Richtung bekommt : $\theta = \theta_0 + \delta$. Zeige dass für δ die folgende Bewegungsgleichung gilt (Beachte das Ergebnis aus (b)):

$$\ddot{\delta} + \frac{g}{l}\sin(\theta_0 + \delta) - \frac{g}{l}\frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\frac{\cos(\theta_0 + \delta)}{\sin^3(\theta_0 + \delta)} = 0 \tag{4}$$

(g) Da δ infinitesimal ist, entwickle Gleichung 4 bis zur ersten Ordnung in δ.

(h) Bestimme aus (g) die Periodendauer der Schwingung in θ.

H 4 Harmonischer Oszillator als Grundlage der theoretischen Physik

In sehr vielen Bereichen der (theoretischen) Physik begegnet man dem harmonischen Oszillator. Aber warum ist das so? Betrachte das fiktive Potential $V(x) = x^2 \exp(\sin^2 x)$. In dieser Aufgabe vernachlässigen wir alle Einheiten. Im globalen Minimum x_0 des Potentials befindet sich ein Teilchen der Masse m.

(a) An welcher Position x_0 befindet sich das Teilchen? Finde dazu das Minimum.

(b) Finde einen Ausdruck für die maximale Auslenkung $x_{\max}$ des Teilchens in Abhängigkeit der kinetischen Energie im Potentialminimum $E_{\text{kin.}}(x_0)$

(c) $E_{\text{kin.}}(x_0)$ sei nun so klein, dass für die maximale Auslenkung $x_{\max} - x_0 = \delta \ll 1$ gilt. Entwickle das Potential um das Minium herum bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung in δ.

(d) Stelle die Bewegungsgleichung des Teilchen auf. Was fällt auf?

Viel Spaß!