Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html`
Abgabe: 08.05.2023

Anwesenheitsaufgaben

In der ersten Aufgabe werden die Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet und Eigenschaften dieser betrachtet. Danach soll ein einfaches Beispiel, die Atwoodsche Fallmaschine, mit diesen berechnet werden.

A 1 Grundlagen der Variationsrechnung

Ein System nehme zu den Zeiten t_1 und t_2 die durch die verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t_1)$ und $q_i(t_2)$ bestimmten Positionen ein. Es gilt $i = 1, 2, \ldots, n$, wobei n die Dimension des Konfigurationsraums sei. Das System entwickle sich zwischen den beiden Zeitpunkten derart, dass das Funktional

$$S(q_i(t),\, \dot{q}_i(t),\, t) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t),\, \dot{q}_i(t),\, t)\, dt \tag{1}$$

extremal wird (S heißt Wirkung und L Lagrangefunktion). Im Folgenden wird der Einfachheit halber $n = 1$ gewählt. Nimm an, dass die Funktion $q(t)$ ein Extremum von S sei, d.h. sie minimiert oder maximiert S. Betrachte nun die Variation von S, indem $q(t)$ durch $q(t) + \varepsilon\, \eta(t)$ ersetzt wird. Hierbei sind ε ein kleiner, konstanter Parameter und $\eta(t)$ eine Störfunktion. Die Randbedingungen sind $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.

(a) Skizziere das Problem. Was ist der Unterschied zwischen Extrema in der Variationsrechnung und in der Funktionalanalysis? Was ist die Ableitung $\frac{d}{dt}(q(t) + \varepsilon\, \eta(t))$?

(b) Zeige für die Variation von S:

$$\delta S = \frac{d}{d\varepsilon} S\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon\, \eta(t),\, \dot{q}(t) + \epsilon\, \dot{\eta}(t),\, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q}\, \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \dot{\eta}(t) \Big)\, dt = 0 \tag{2}$$

Integriere dann partiell, um $\dot{\eta}$ zu eliminieren. Was passiert mit den Randtermen? Wieso wird $\delta S = 0$ gefordert? Warum darf $\frac{d}{d\varepsilon}$ unter das Integral gezogen werden?

(c) Das Fundamentallemma der Variationsrechnung besagt, dass aus dem Verschwinden des Integrals $\int_a^b f(x)\, g(x) dx = 0$ für beliebige $f(x)$ folgt, dass $g(x) \equiv 0$ sei, falls alle auftretenden Funktionen hinreichend gutartig sind. Folgere damit die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELGen):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{3}$$

(d) Wieso erhält man bei n Koordinaten n ELGen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ mit $1 \leq i \leq n$?

(e) Wie verändert sich die ELG, wenn L auch von höheren Ableitungen abhängt?

(f) Eine Koordinate q_i heißt zyklisch, wenn L nur von ihrer Ableitung $\dot{q}_i$ und nicht von q_i selber abhängt. Was gilt für den dazugehörigen kanonischen Impuls $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$?

(g) Um die Bewegungsgleichungen eines Systems zu erhalten, wird $L = E_{kin} - V$ gesetzt. Berechne die ELGen in kartesischen Koordinaten. Welchem Gesetz entsprechen diese?

(h) Was ist der Vorteil des Lagrangeformalismus gegenüber den Newtonschen Gesetzen?

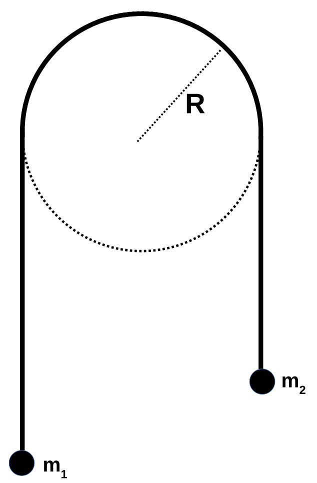

Abbildung 1: Skizze Atwoodsche Fallmaschine

A 2 Atwoodsche Fallmaschine

Über eine masselose Rolle mit Radius R wird ein ebenso masseloses Seil mit der Länge l reibungslos geführt, an dessen Enden sich zwei Massestücke mit den Massen m_1 und m_2 befinden (siehe Abbildung 1). Auf sie wirkt die Gewichtskraft. Die z-Achse soll vernachlässigt werden.

(a) Wähle zu Beginn geeignete Koordinaten. Es bietet sich an, die y-Koordinate des ersten Massestücks als freie Koordinate y_1 anzunehmen und die y-Koordinate des zweiten Massestücks durch diese auszudrücken.

(b) Stelle die Lagrangefunktion auf, indem du die kinetische und die potentielle Energie durch die gewählten Koordinaten ausdrückst.

(c) Gibt es Erhaltungsgrößen? Stelle die ELG(en) auf.

(d) Löse die Bewegungsgleichung(en).

Hausaufgaben

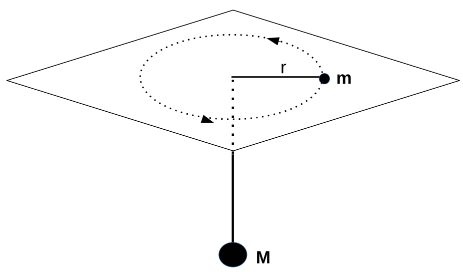

Abbildung 2: Skizze rotierende Masse auf einem Tisch verbunden mit einer zweiten hängenden Masse

H 1 Rotierende Masse auf einem Tisch

Eine Kugel der Masse m sei mit einem masselosen Faden der Länge l mit einer zweiten Kugel der Masse M verbunden. Der Faden ist so durch ein Loch in einem Tisch gefädelt, dass M nach unten hängt. Der Durchmesser des Fandens und des Lochs sind dabei vernachlässigbar. Die auf dem Tisch befindliche Masse m rotiert reibungsfrei um das Loch mit der Geschwindigkeit $\dot{\phi}$. Wähle für diese Aufgabe Kugelkoordinaten.

(a) Welche Zwangsbedingungen schränken die Bewegungen der beiden Massen ein? Stelle die Lagrangegleichung für die übrig gebliebenen Freitheitsgrade auf.

(b) Stelle die Bewegungsgleichungen auf. Welche Erhaltungsgrößen besitzt das System?

(c) Das System habe eine konstante Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = \omega$. Löse die Bewegungsgleichung für r und drücke r druch die Erhaltungsgröße aus Teilaufgabe (b) aus.

(d) Löse die Bewegungsgleichungen auch für $\dot{\phi} = 0$. Was passiert in diesem Fall?

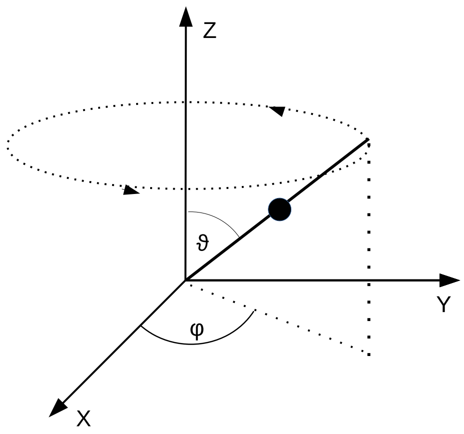

Abbildung 3: Skizze Perle auf rotierendem Draht

H 2 Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, bewegt sich reibungsfrei auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel ϑ um die z-Achse rotierenden Draht (siehe Abbildung 3). Das System befindet sich im homogenen Erdschwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

(a) Gebe die Zwangsbedingungen an. Bestimme die Lagrangefunktion in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten.

(b) Stelle die ELG auf. Für welchen Abstand R vom Ursprung ist die Perle kräftefrei?

(c) Löse nun die Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $r(t=0) = r_0$ und $\dot{r}(t=0) = 0$.

H 3 Erhaltungsgröße

Wir haben im letzten Zettel und in der Vorlesung gesehen, dass, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von einer der verallgemeinerten Koordinaten q_i abhängt, eine Erhaltungsgröße existiert. Die Erhaltungsgröße lässt sich über die Euler-Lagrange-Gleichungen finden. Dies ist aber nicht die einzige Möglichkeit aus der Lagrangegleichung eine Erhaltungsgröße abzuleiten. Betrachte im Folgenden die Größe

$$O = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L. \tag{4}$$

(a) O ist erhalten, wenn L nicht explizit von der Zeit abhängt. Um das zu zeigen, leite den folgenden Ausdruck mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen her:

$$\frac{dO}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{5}$$

(b) Bestimme O für ein Teilchen in einer Dimension im Schwerefeld. Welcher Größe entspricht O?

H 4 Lagrange und Zeitableitung

In der Vorlesung haben wir bereits durch einsetzen in die ELGen gesehen, dass man zu der Lagrange-Funktion eine totale Zeitableitung addieren kann ohne die Bewegungsgleichungen zu verändern.

(a) Zeige dass $\widetilde{L} = L + \frac{dF}{dt}$, mit $F = F(q, t)$ unter den gleichen Bedingungen ein Extremum der Wirkung hat wie L.

Viel Spaß!