Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html`
Abgabe: 17.05.2023

Anwesenheitsaufgaben

Die beiden Anwesenheitsaufgaben sind Beispiele zur Anwendung der Variationsrechnung.

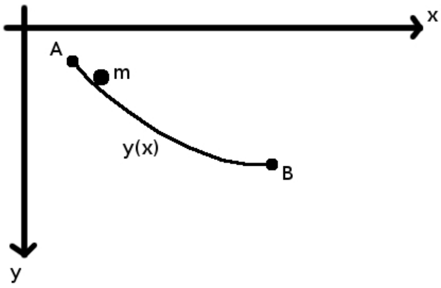

Abbildung 1: Skizze Brachistochrone

A 1 Brachistochrone

Das sogenannte Brachistochronenproblem wurde 1696 von Johann Bernoulli als Wettbewerbsaufgabe gestellt. Die Lösung führte zur Begründung der Variationsrechnung. Ein Massenpunkt soll über einen festgelegten Weg von A nach B laufen (siehe Abbildung 1). Was ist die schnellste Verbindung $y(x)$ zwischen den beiden Punkten, wenn als einzige Kraft die Erdanziehung wirkt? Der Massenpunkt ruht zu Beginn.

(a) Was ist das Linienelement ds? Zeige, dass die Zeit T, die der Massenpunkt von A nach B läuft, als

$$T = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\, dx \tag{1}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist $y' = dy/dx$ und v die Geschwindigkeit des Massenpunktes.

(b) Eliminiere v aus Gleichung (1) mit Hilfe der Energieerhaltung. Wie zuvor in Aufgabe A 1 der Übung 5 das Integral $S(q_i(t),\, \dot{q}_i(t),\, t) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t),\, \dot{q}_i(t),\, t)\, dt$ minimiert wurde soll hier ein Integral der gleichen Form mit $T(y(x), y'(x), x) = \int_A^B L(y(x), y'(x), x)\, dx$ minimiert werden. Wende die ELG entsprechend an. Hinweis: Es ist einfacher

$$H := L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = k_1 = konst. \tag{2}$$

mit Hilfe der ELG zu zeigen und H zur weiteren Lösung zu benutzen anstatt die ELG direkt anzuwenden.

(c) Finde die schnellste Verbindung durch Lösung von Gleichung (2). Verwende hierzu die Substitution $y = r_0\,(1-\cos\varphi) = 2\,r_0\,\sin^2(\varphi/2)$ mit $r_0 = 1/(2\,k_1^2)$. Zeige, dass dann $x = r_0\,(1-\sin\varphi) + k_2$ folgt und die Brachistochrone somit einer Zykloide (Rollkurve) entspricht. Bestimme die Konstanten aus den Anfangsbedingungen $A = (x_A,\, y_A) = (0,\, 0)$ und $B = (x_B,\, y_B)$.

(d) Berechne die Zeit, die der Massenpunkt mit der schnellsten Verbindung benötigt und die Zeit, die der Massenpunkt auf einer direkten Geraden von A nach B braucht.

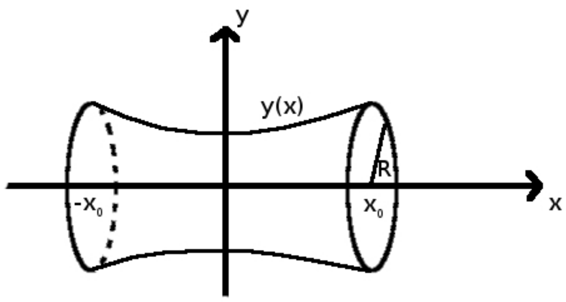

Abbildung 2: Skizze Seifenhaut

A 2 Seifenhaut

Zwischen zwei Kreisringen mit Radius R, die bei $x = -x_0$ und $x = x_0$ zentriert in der yz-Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (siehe Abbildung 2). Aufgrund der Oberflächenspannung bildet sich die Seifenhaut so aus, dass ihre Fläche minimal wird.

(a) Das gesamte Problem ist rotationssymmetrisch um die x-Achse. Zeige, dass für eine Funktion $y(x)$ zwischen den Kreisringen die Fläche F der Rotationsfigur durch das Funktional

$$F(y(x), y'(x), x) = \int_{-x_0}^{x_0} 2\pi\, y\, \sqrt{1 + y'^{\,2}}\, dx \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $y' = dy/dx$ ist.

(b) Benutze nun die Methode der Variationsrechnung, um die von der Seifenhaut gebildete Minimalfläche zu finden. Gesucht ist also die Funktion $y(x)$, die F minimiert. Zeige dafür, dass aus der ELG folgt:

$$\frac{d}{dx}\left(y\sqrt{1 + y'^{\,2}} - y\frac{y'^{\,2}}{\sqrt{1 + y'^{\,2}}} \right) = 0 \tag{4}$$

Der Klammerausdruck kann somit konstant gesetzt und daraus $y(x)$ gefunden werden.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben beinhalten weitere Beispiele zur Übung des Lagrangeformalismus.

H 1 Pendel mal anders

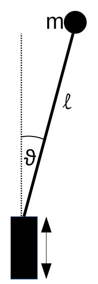

Abbildung 3: Skizze des getriebenen Pendels

Betrachte das in Abb. 3 gezeigte Pendel. Ein Punkt der Masse m ist am Ende eines starren, masselosen Stabs der Länge l befestigt. Das entgegengesetzte Ende der Stange ist an einer Aufhängung so befestigt, dass ein Motor die Höhe der Aufhängung $y(t)$ variieren kann. Der Stab soll dabei wie in der Skizze gezeigt nach oben zeigen. Wir wollen nun zeigen, dass die Bewegung der Aufhängung dazu führen kann, dass die Position stabilisiert wird.

(a) Stelle die Lagrangefunktion in den Koordinaten (y, θ) auf. Zeige, dass die Bewegungsgleichung für θ gegeben ist durch:

$$l\ddot{\theta} - \ddot{y}\sin\theta = g\sin\theta \tag{5}$$

(b) Die Bewegung der Aufhängung sei gegeben als $y(t) = A\cos(\omega t)$. Zeige, dass für kleine Winkel θ die Bewegungsgleichung geschrieben werden kann als

$$\ddot{\theta} + \theta\left(a\omega^2\cos(\omega t) - \omega_0^2\right) = 0. \tag{6}$$

Finde a und ω_0.

(c) Die Differentialgleichung 6 ist nicht analytisch lösbar. Wenn die Hausaufgaben besprochen werden, wird das Ergebnis einer numerischen Lösung als Diagramm gezeigt. Wir können aber Teile der Dynamik analytisch näherungsweise untersuchen. Dazu sei die Auslenkung der Aufhängung klein gegenüber der Länge des Stabs $a \ll 1$ und die angetriebene Frequenz viel größer als die Eigenfrequenz, sodass $a\omega^2 \gg \omega_0^2$ gilt. Benutze den Ansatz

$$\theta \approx C + b\cos(\omega t) \tag{7}$$

mit $b \ll C$. Wir schauen uns erst die Dynamik auf einer kleinen Zeitskala an, sodass C nahezu konstant ist. Zeige, dass Gleichung 6 näherungsweise gegeben ist durch

$$-b\omega^2\cos(\omega t) + Ca\omega^2\cos(\omega t) = 0. \tag{8}$$

Eliminiere damit b aus dem Ansatz (7).

(d) Um die Dynamik über längere Zeiten zu beschreiben kann der Mittelwert der Differentialgleichung über eine Schwingung der Aufhängung betrachtet werden. Betrachte dazu

$$\bar{\ddot{\theta}} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{\theta}dt \tag{9}$$

mit $T = 2\pi/\omega$. Nutze Gleichung 6 und den Ansatz (7) um zu zeigen dass

$$\bar{\ddot{\theta}} = -C\Omega^2 \tag{10}$$

gilt. Bestimme Ω.

(e) Bestimme die linke Seite von Gleichung 10, indem der Ansatz (7) eingesetzt wird. Das Resultat ist eine Bewegungsgleichung für C.

(f) Was muss gelten, wenn Ω reell sein soll? Zeige, dass diese Bedingung konsistent mit unserer Annahme $a\omega^2 \gg \omega_0^2$ ist. Wir sehen also, dass der Massepunkt eine Oszillation um das senkrechte Lot beschreibt, wenn unsere Annahmen eintreffen (vereinfacht: kleine Auslenkung und hochfrequenter Antrieb). Die Bewegung der Aufhängung sorgt also dafür, dass der Massepunkt stabilisiert wird, obwohl man naiv denken könnte, dass sich im Mittel über viele Perioden T der Effekt aufhebt.

H 2 Pendel hängt an Masse

Zwei Punktmassen m sind mit einem masselosen Seil fester Länge verbunden, welches reibungsfrei über zwei Rollen verläuft (siehe Abbildung 4). Die Größen der Rollen können vernachlässigt werden. Die linke Masse kann sich nur in vertikaler Richtung, also nach oben und unten bewegen. Die rechte Masse hat zusätzlich die Freiheit in der Ebene zu schwingen, d.h. nach links und rechts.

(a) Benutze die in der Abbildung zu sehenden Koordinaten r und φ als freie Koordinaten. Stelle die Lagrangefunktion auf.

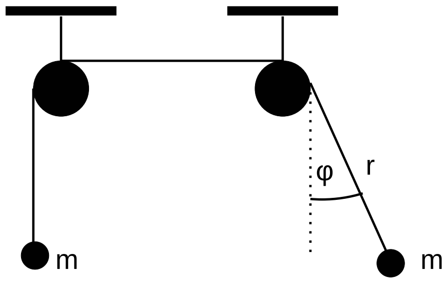

Abbildung 4: Skizze Pendel hängt an Masse

(b) Finde die Bewegungsgleichungen von r und φ.

(c) Nimm an, dass die linke Masse zu Beginn ruht, während die rechte Masse auf gleicher Höhe hängt, aber um einen kleinen Winkel α mit $\alpha \ll 1$ ausgelenkt wird und anfängt hin und her zu schwingen. In welche Richtung wird die linke Masse anfänglich beschleunigt und wie groß ist diese Beschleunigung? (Hinweis: Berücksichtige nur φ-Terme bis zur zweiten Ordnung und mittele die Beschleunigung über ein paar Schwingungen)

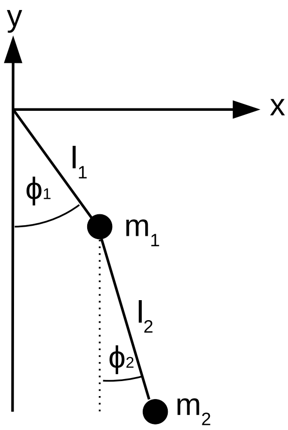

Abbildung 5: Skizze Doppelpendel

H 3 Doppelpendel

Betrachte das Doppelpendel mit den Massenpunkten m_1 und m_2, sowie den festen Pendellängen l_1 und l_2 (siehe Abbildung 5). Wähle die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 als verallgemeinerte Koordinaten.

(a) Schreibe die kartesischen Koordinaten x_j und y_j mit $j = 1, 2$ als Funktionen der ϕ_j.

(b) Stelle die Lagrangefunktion $L(\phi_j, \dot{\phi}_j)$ auf und bestimme die Bewegungsgleichungen.

(c) Finde die Lösungen der Bewegungsgleichungen für den Fall $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ und kleinen Auslenkungen (berücksichtige ϕ nur bis zur ersten Ordnung). Mache den Ansatz $\phi_j(t) = a_j \exp(i\,\omega\,t)$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus einer Überlagerung der gefundenen Fundamentalschwingungen. Bestimme nun die Lösung für die Anfangsbedingungen $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ und $\dot{\phi}_1(0) = \omega_0$.

(d) Betrachte die erzwungene Schwingung $\phi_1(t) = \phi_0 \sin(\Omega t)$. Bestimme die Lösung von $\phi_2(t)$ für kleine Auslenkungen.

Viel Spaß!