Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html
Abgabe: 05.06.2023

Quickies

- Wie ist die Lagrange-Funktion definiert?
- Wie wird die Wirkung aus der Lagrange-Funkion definiert?
- Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen?
- Welche Eigenschaft muss die Lagrange-Funktion erfüllen, damit die Gesamtenergie erhalten ist?
- Welche Zwangsbedingungen gelten in Kartesischen Koordinaten für die folgenden Beispiele?
  (a) Ein Massepunkt hängt an einem nicht dehnbaren Faden.
  (b) Ein Gummiball springt auf dem Boden.

Anwesenheitsaufgaben

A 1 Hamiltonsche Mechanik

Für ein System mit der Lagrangefunktion $L(q_i(t),\, \dot{q}_i(t),\, t)$ ist die Hamiltonfunktion

$$H(q_i(t),\, p_i(t),\, t) = -\mathcal{L}_1 \ldots \mathcal{L}_n L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, p_i - L \tag{1}$$

die Legendretransformierte von L, wobei alle $\dot{q}_i$ zugunsten von $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ ersetzt werden. Hierbei ist $H(q_i,\, p_i,\, t) = H(q_1,\, \ldots,\, q_n,\, p_1,\, \ldots,\, p_n,\, t)$.

(a) Gib H für ein freies Teilchen in kartesischen Koordinaten, sowie Zylinder- und Kugelkoordinaten an.

(b) Leite nun die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{und} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2}$$

aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_i,\, p_i,\, t) \right) = 0 \tag{3}$$

her. Ersetze hiefür die $q_i(t)$ durch $q_i(t) + \epsilon\, \eta_i(t)$ und die $p_i(t)$ durch $p_i(t) + \epsilon\, \pi_i(t)$. Verfahre genauso wie bei der Herleitung der ELGen (siehe Übung 5 Aufgabe A 1). Was gilt für die Randterme?

(c) Gib H sowie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für den eindimensionalen harmonischen Oszillator an.

(d) Zeige, dass $dH/dt = \partial H/\partial t$ gilt. Wann ist H demnach erhalten?

(e) Welcher physikalischen Größe entspricht H für ein konservatives System, d.h. es gilt für das Potential $V = V(q_i)$, mit holonom-skleronomen (also zeitunabhängigen) Zwangsbedingungen?

(f) Was passiert mit zyklischen Koordinaten beim Übergang zu H?

Hausaufgaben

H 1 Legendre-Transformation

In einer Funktion $f(x_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sollen die Koordinaten x_i zugunsten von neuen Koordinaten $y_i = \partial f / \partial x_i$ eliminiert werden.

(a) Definiere die Legendretransformierte einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ bzgl. der Koordinate x_i als $\mathcal{L}_i f := f - y_i\, x_i$ und vergleiche das totale Differential mit dem von f. Von welchen Variablen hängt $\mathcal{L}_i f$ ab und wie lauten die zugehörigen Ableitungen?

(b) Ist diese Transformation immer eindeutig? (Hinweis: Was passiert für lineare f?)

(c) Berechne $\mathcal{L}_x f$ für $f(x) = a + b\, x^2$ und $\mathcal{L}^2 f$ für beliebiges f. Wann ist $\mathcal{L}$ involutiv? (Hinweis: Eine Abbildung F ist involutiv, wenn zweimaliges Abbilden F^2 die Identität ergibt)

H 2 Pendel mit Newton, Lagrange und Hamilton

Eine Punktmasse m hängt an einem Faden der Länge l. Nur die Gewichtskraft wirkt.

(a) Gebe die Lagrangefunktion L, die Hamiltonfunktion H, sowie die totale Energie $E_{tot} = E_{kin} + V$ des Pendels an.

(b) Leite die Bewegungsgleichung des Pendels im Rahmen der Newtonschen, Lagrangeschen und Hamiltonschen Mechanik ab.

(c) Gilt $H = E_{tot}$? Ist H bzw. E_{tot} erhalten? Kann dies ohne Rechnung gesehen werden?

(d) Leite nun zuletzt die Bewegungsgleichung mithilfe der Energieerhaltung ab, d.h. fordere $\dot{E}_{tot} = 0$ und folgere daraus die Bewegungsgleichung.

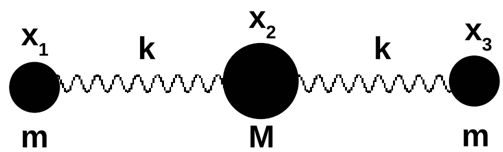

Abbildung 1: Skizze Dreiatomiges Molekül

H 3 Schwingungen eines dreiatomigen Moleküls

In Abbildung 1 kann ein mechanisches Modell zur Berechnung von eindimensionalen Schwingungen eines dreiatomigen, linearen Moleküls gesehen werden. Zwei Massen m und eine Masse M sind durch Federn mit der Federkonstante k verbunden.

(a) Stelle die Lagrangefunktion auf und berechne danach die Hamiltonfunktion.

(b) Berechne die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Hamiltongleichungen und zeige, dass diese die folgende Form annehmen:

$$m\, \ddot{x}_1 = -k\,(x_1 - x_2) \tag{4}$$

$$M\, \ddot{x}_2 = -k\,(2\, x_2 - x_1 - x_3) \tag{5}$$

$$m\, \ddot{x}_3 = -k\,(x_3 - x_2) \tag{6}$$

(c) Löse die obigen Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz $x_j(t) = a_j \exp(i\,\omega\,t)$ mit $j = 1, 2, 3$. Zeige aus dem Verschwinden der Koeffizientendeterminante, dass die Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\,(1 + 2\,\frac{m}{M})}$$

sind. Betrachte die zugehörigen Eigenschwingungen durch Bestimmung der Koeffizienten a_j für jede Eigenfrequenz.

H 4 Zyklische Koordinaten

Zeige explizit, dass

$$\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} = -\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} \tag{7}$$

gilt. Folgere daraus, dass die Impulserhaltung im Hamiltonformalismus konstitent mit der im Lagrangeformalismus ist.

Viel Spaß!