Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html
Abgabe: 12.06.2023

Hausaufgaben

H 1 Noether Theorem

In der Vorlesung haben wir schon Beispiele der Relation zwischen kontinuierlichen Symmetrien (Zeitverschiebung, Rotation) und Erhaltungsgrößen gesehen. Diese Verknüpfung ist ein grundlegender Baustein der Physik und ist formal unter der bezeichnung Noether Theorem (formuliert duch Emmy Noether, auch geschichtlich sehr interessant!) bekannt. Betrachte die Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Wir betrachten nun Transformationen, die die Bewegungsgleichungen unverändert lassen. Betrachte dazu die Transformation $q_i \to Q_i(q_j, t, \alpha)$ wobei α ein kontinuierlicher Parameter ist und die Transformation stetig differenzierbar und invertierbar ist. Weiterhin soll $Q_i(q_j, t, \alpha = 0) = q_i$ gelten. In einer Dimension können wir eine infinitesimale Tranformation schreiben als

$$q \to Q = q + \alpha\delta(q, t) \tag{1}$$

wobei δ eine Funktion von q oder konstant ist.

(a) Man spricht von einer Symmetrie, wenn die Bewegungsgleichungen invariant bezüglich einer Transformation sind. Im Lagrangeformalismus bedeutet das, dass die Transformation die Lagrangefunktion nur bis auf eine totale Zeitableitung ändern darf. Formal heisst das, dass eine Funktion $F(q, \dot{q}, \alpha, t)$ existieren muss, sodass

$$L(q, \dot{q}, t) \to L(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}. \tag{2}$$

Leite aus

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L(Q, \dot{Q}, t)\big|_{\alpha=0} \tag{3}$$

mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen den Ausdruck

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial\dot{q}}\frac{\partial Q}{\partial\alpha} - \frac{\partial F}{\partial\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=0} \equiv \frac{d}{dt}J \tag{4}$$

her. J heißt Noetherladung und ist eine Erhaltungsgröße.

(b) Betrachte zwei Teilchen der Masse m in einer Dimension im Potenzial der Form $V(x_1 - x_2)$. Verallgemeinere zuerst Gleichung 4 für mehr als ein Teilchen. Zeige anschließend, dass die Transformation $x_i \to x_i + \alpha$ die Bewegungsgleichungen unverändert lassen. Bestimme die Noetherladung J. Welcher bekannten Erhaltungsgröße entspricht diese?

(c) Betrachte nun den harmonischen Oszillator mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \tag{5}$$

Zeige, dass die Transformation $x \to x + \alpha\cos\omega t$ mit $\omega^2 = k/m$ eine Symmetrietransformation der Lagrangefunktion ist.

(d) Zeige, dass J bis auf multiplikative Konstanten gegeben ist durch

$$J = \dot{x}\cos\omega t + \omega x \sin\omega t. \tag{6}$$

(e) Nutze nun $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (die Lösung der Bewegungsgleichung) durch Einsetzen um zu zeigen, dass J tatsächlich erhalten ist.

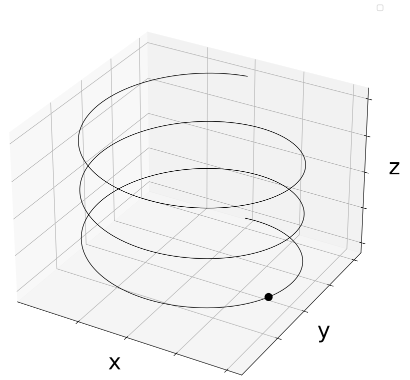

Abbildung 1: Perle auf Schraubenlinie

H 2 Perle auf Schraubenlinie

Eine Perle der Masse m gleitet unter der Gravitationskraft reibungsfrei auf einem schraubenförmig gebogenen Draht in z-Richtung. Die Schraube hat den Radius R und die Ganghöhe (Abstand in z-Richtung zwischen zwei Windungen bei konstantem Winkel) a.

(a) Welche Zwangsbedingungen gelten? Schreibe die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten auf. Nutze die Zwangsbedingungen, um alle Freiheitsgrade außer ϕ und $\dot{\phi}$ zu eliminieren.

(b) Nutze die Bewegungsgleichung, um einen Ausdruck für $\ddot{\phi}$ zu finden.

(c) Bestimme $\phi(t)$ und $z(t)$ mit $\dot{\phi}(0) = \phi(0) = z(0) = 0$.

(d) Finde eine gemeinsame kontinuierliche Transformation von ϕ und z, die die Bewegungsgleichungen unverändert lassen. (Tipp: Eine rotierte Schraube ist äquivalent zu einer in Rotationsrichtung verschobenen Schraube.)

(e) Finde die zur Transformation zugehörige Erhaltungsgröße J.

H 3 Perle auf parabelförmigem Draht

Dieses Mal befindet sich die Perle der Masse m reibungsfrei auf einem parabelförmigen Draht. Die Gravitationskraft wirkt in $-z$ Richtung. In Zylinderkoordinaten lässt sich der Draht mit $z(r) = ar^2$ parametrisieren. Der Draht rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.

(a) Finde die Zwangsbedingungen und die Lagrangefunktion.

(b) Bestimme die Bewegungsgleichung für r.

(c) Zeige mithilfe der Bewegungsgleichungen, dass die Gesamtenergie $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ erhalten ist.

(d) Für welche ω befindet sich die Perle im Gleichgewicht ($\dot{r} = 0$)?

H 4 Geschwindigkeitsabhängiges Potenzial

Betrachte in karthesischen Koordinaten das verallgemeinerte Potenzial

$$U(\vec{x}, \vec{v}) = -Q\vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{v} \tag{7}$$

wobei $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ und Q eine Konstante ist. Der Vektor $\vec{A}$ soll keine explizite Zeitabhängigkeit haben.

(a) Zeige mithilfe von

$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{8}$$

dass sich die zum Potenzial U gehörige Kraft schreiben lässt als

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right). \tag{9}$$

(b) Finde die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse m im Potenzial U und daraus die Bewegungsgleichungen.

(c) Berechne den kanonisch konjugierten Impuls $\vec{\tilde{p}}$ und zeige, dass die Hamiltonfunktion die Form

$$H = \frac{\left(\vec{\tilde{p}} - Q\vec{A}\right)^2}{2m} \tag{10}$$

hat.

(d) Bestimme die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und zeige, dass sie den Lagrange Bewegungsgleichungen äquivalent ist.

(e) Folgere aus der Erhaltung der Gesamtenergie, dass der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ erhalten ist.

Viel Spaß! :)