Übung 1

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 15.10.2019)

In der Hausaufgabe wird der Gaußsche Satz und der Satz von Stokes in unterschiedlichen Formen angewendet.

H 1.1 Elektrische Feldstärken

Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und das Potenzial Φ der folgenden Körper:

- Eine homogen geladene Gerade
- Ein homogen geladener, unendlich langer Zylinder mit Radius R
- Eine homogen geladene, unendlich ausgedehnte Platte
- Eine homogen geladene Kugel mit Radius R

Berechnen Sie auch die inneren Felder für den Zylinder und die Kugel. Hinweis: Verwenden Sie den Gaußschen Satz

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \int_{\mathrm{V}} \rho \, \mathrm{d}^3 x, \tag{1}$$

wobei auf der linken Seite über den Rand ∂V im $\mathbb{R}^3$, welcher das Volumen auf der rechten Seite einschließt, integriert wird. Das Randelement $\mathrm{d}\vec{F}$ zeigt senkrecht zum betrachteten Randstück nach außen. ρ ist die Ladungsdichte (Ladung pro Volumen).

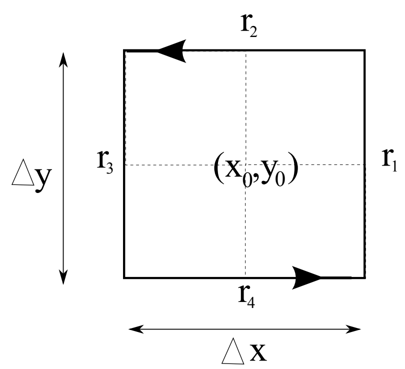
H 1.2 Satz von Stokes

Der Satz von Stokes lautet:

Gegeben sei eine Fläche S mit dem Rand ∂S und ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$. Dann gilt:

$$\int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_S \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \, . \tag{2}$$

Dieser Satz soll im folgenden bewiesen werden. Hierzu wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem (x, y) und diskretisieren mit Gitterabstand Δx und Δy. Weiterhin legen wir einen geschlossenen Weg um den Punkt (x_0, y_0) wie abgebildet:



a) Berechnen Sie das Linienintegral $\int_r \mathrm{d}\vec{r}\vec{A}$ mit den Stützstellen $\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_4$.

b) Entwickeln Sie $\int_r \mathrm{d}\vec{r}\vec{A}$ als Taylor-Reihe und zeigen Sie, dass die erste Ordnung sich schreiben lässt als $\Delta x \Delta y \vec{e}_z (\vec{\nabla} \times \vec{A})$.

c) Führen Sie $\Delta \vec{f} = \Delta x \Delta y \vec{e}_z$ ein, um den Ausdruck weiter zu vereinfachen.

d) Betrachten Sie zwei Rechtecke S_1 und S_2 mit einer gemeinsamen Kante. Zeigen Sie

$$\int_{\partial S_1} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A} + \int_{\partial S_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A} = \int_{\partial (S_1 \vee S_2)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}. \tag{3}$$

e) Kombinieren Sie die Aussagen aus c) und d).

Viel Spaß!