Übung 10

Anwesenheitsaufgaben (12./13.12.2019)

A 10.1 Greensche Funktion des Wellenoperators

Wir suchen die Greensche Funktion $G(\vec{r},t)$ des Wellenoperators im $\mathbb{R}^3$, d.h. es gilt:

$$\Box G(\vec{r},t) = \delta^{(3)}(\vec{r})\delta(t) \quad \text{mit} \quad \Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \tag{1}$$

(a) Die Fouriertransformation bildet Ableitungen in Multiplikationen ab und vereinfacht somit das Problem: Zeigen Sie $(|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\tilde{G}(\vec{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}$ für die Fouriertransformierte $\tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\tilde{G}(\vec{k},t)$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass mit beliebigen Funktionen $a_\pm(\vec{k})$ gilt:

$$\tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + a_-(\vec{k})\delta(|\vec{k}| + \frac{\omega}{c}) + a_+(\vec{k})\delta(|\vec{k}| - \frac{\omega}{c}). \tag{2}$$

Was ist demnach die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\Box G(\vec{r},t) = 0$?

(c) Wir betrachten nun nur noch den inhomogenen Term. Zeigen Sie, dass nach Anwenden der inversen Fouriertransformation mit $\omega_0 = c|\vec{k}|$ gilt:

$$G(\vec{r},t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}\omega\,\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \tag{3}$$

(d) Wegen der Pole bei $\omega = \pm\omega_0$ ist das Integral in Glg. (3) nicht definiert. Daher ist es zweckmässig, die Polstellen auf der reellen Achse in die komplexe Ebene hinein zu deformieren. Wir deformieren die Polstellen in die untere Halbebene hinein, dies entspricht der Wahl der *retardierten* Greenschen Funktion. Durch diese Deformation hat das zu berechnende Integral die Form

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\,\frac{1}{\omega - (\omega_0 - i\epsilon)}\frac{1}{\omega - (-\omega_0 - i\epsilon)}e^{-i\omega t}. \tag{4}$$

Um den Cauchyschen Integralsatz bzw. den Residuensatz anwenden zu können, muss der Integrationsweg um die Polstelle aber noch zu einer geschlossenen Kurve ergänzt werden. Dies kann mit einem Halbkreis in der oberen oder unteren Halbebene geschehen. Anschließend kann das Limit $\epsilon \to 0$ genommen werden. Zeigen Sie, dass für $t < 0$ ein Halbkreis mit unendlich großem Radius in der oberen Halbebene keinen Beitrag zum Integral ergibt. Folgern Sie daraus, dass $I(t) = 0$ für $t < 0$.

(e) Zeigen Sie mit dem Cauchyschen Integralsatz $f(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0}\mathrm{d}\omega$, wobei der Integrationsweg den Pol ω_0 positiv orientiert umschließt: $I(t) = -\frac{2\pi}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\Theta(t)$. Damit gilt dann für die retardierte Greensche Funktion:

$$G_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \Theta(t)\frac{c}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\,\frac{1}{|\vec{k}|}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\sin\Big(|\vec{k}|ct\Big). \tag{5}$$

(f) Führen Sie in (e) Polarkoordinaten ein und integrieren Sie über die Winkel:

$$G_{\text{ret}}(\vec{r},t) = -\Theta(t)\frac{ic}{(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,e^{ikr}\sin(kct). \tag{6}$$

(g) Zeigen Sie schließlich mit $\int e^{i\vec{x}\cdot\vec{y}}d^ny = (2\pi)^n\delta^{(n)}(\vec{x})$, dass

$$G_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \Theta(t)\frac{c}{4\pi r}(\delta(r - ct) - \delta(r + ct)). \tag{7}$$

(h) Geben Sie die allgemeine Lösung der Wellengleichungen für V_L und $\vec{A}_L$ in Lorenzeichung mit Hilfe der Greenschen Funktion des Wellenoperators an.

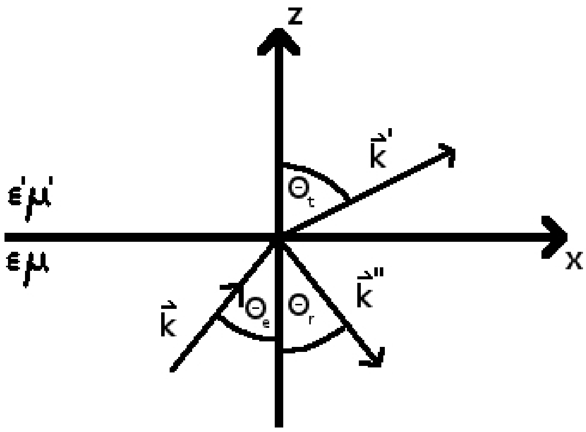

Abbildung 1: Skizze Reflexion und Transmission

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 17.12.2019)

H 10.1 Reflexion und Transmission

Eine Grenzfläche senkrecht zur z-Achse trennt zwei Dielektrika (siehe Abbildung 1). Die einfallende Welle wird durch

$$\vec{E}(\vec{r},\,t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t)} \qquad \vec{B}(\vec{r},\,t) = \frac{1}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{E}(\vec{r},\,t), \tag{8}$$

die gebrochene Welle durch

$$\vec{E}'(\vec{r},\,t) = \vec{E}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega\, t)} \qquad \vec{B}'(\vec{r},\,t) = \frac{1}{\omega}\,\vec{k}'\times\vec{E}'(\vec{r},\,t) \tag{9}$$

und die reflektierte Welle durch

$$\vec{E}''(\vec{r},\,t) = \vec{E}_0''\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega\, t)} \qquad \vec{B}''(\vec{r},\,t) = \frac{1}{\omega}\,\vec{k}''\times\vec{E}''(\vec{r},\,t) \tag{10}$$

beschrieben. Für die Wellenzahlen gilt:

$$|\vec{k}| = |\vec{k''}| = \omega\,\sqrt{\epsilon\,\mu} \qquad |\vec{k'}| = \omega\,\sqrt{\epsilon'\,\mu'} \tag{11}$$

In der Aufgabe sollen der Refexionskoeffizient R und der Transmissionskoeffizient T berechnet werden.

(a) Folgern Sie zuerst aus der Übereinstimmung der Wellenphasen an der Grenzfläche, dass Einfalls- und Ausfallswinkel (Reflexionswinkel) übereinstimmen. Zeigen Sie weiterhin das Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\theta_e)}{\sin(\theta_t)} = \sqrt{\frac{\epsilon'\,\mu'}{\epsilon\,\mu}} = \frac{n'}{n}, \tag{12}$$

wobei n und n' die Brechungsindizes der beiden Medien sind. Zur weiteren Rechnung soll jede Welle in zwei linear polarisierte Wellen mit Polarisierungen senkrecht und parallel zur Einfallsebene zerlegt werden. Die Einfallsebene wird hierbei durch die Vektoren $\vec{k}$ und $\vec{n}$ aufgespannt. Drücken Sie für beide Polarisierungen $\vec{E}'$ und $\vec{E}''$ durch $\vec{E}$ aus. Wenn 1 für die Polarisierung in der Einfallsebene und 2 senkrecht zur Einfallsebene steht, dann sind die zu zeigenden Bedingungen die Folgenden:

$$\begin{aligned}(E_{01} - E''_{01}) \cdot \cos\theta_e - E'_{01} \cdot \cos\theta_t &= 0 \\ (E_{01} + E''_{01}) \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} - E'_{01} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} &= 0 \\ E_{02} + E''_{02} - E'_{02} &= 0 \\ (E_{02} - E''_{02}) \cdot \cos\theta_e \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} - E'_{02} \cdot \cos\theta_t \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Tipp: Die Zerlegung der Polarisierungen würde z.B. für die einfallende Welle wie folgt aussehen: Wenn $\hat{e}_1$ in der und $\hat{e}_2$ senkrecht zur Einfallsebene und beide Einheitsvektoren jeweils senkrecht zum Wellenvektor $\vec{k}$ der einfallenden Welle liegen, dann kann $\vec{E}_0 = (\vec{E}_0 \cdot \hat{e}_1) \cdot \hat{e}_1 + (\vec{E}_0 \cdot \hat{e}_2) \cdot \hat{e}_2 = E_{01} \cdot \hat{e}_1 + E_{02} \cdot \hat{e}_2$ geschrieben werden. Analog kann dies für die anderen Wellen gemacht werden.

(b) Berechnen Sie nun R_2 und T_2 für die senkrechte Polarisierung mit den Formeln

$$R_2 = \frac{I''_2}{I_2} \qquad T_2 = \frac{I'_2}{I_2}. \tag{14}$$

I_2 ist hierbei die Lichtintensität der senkrecht polarisierten, einfallenden Welle. Zeigen Sie, dass

$$R_2 = \frac{(1-\alpha\,\beta)^2}{(1+\alpha\,\beta)^2} \qquad T_2 = \frac{4\alpha\,\beta}{(1+\alpha\,\beta)^2} \tag{15}$$

mit $\alpha = \cos\theta_t / \cos\theta_e$ und $\beta = \sqrt{\epsilon'\,\mu/\epsilon\,\mu'}$ gilt und überprüfe $R_2 + T_2 = 1$.
Hinweis: In der Vorlesung wurde die Polarisierung innerhalb der Einfallsebene betrachtet, d.h. in unserer Notation R_1 und T_1.

H 10.2 Lösung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen

Gegeben seien das Potenzial V_L und das Vektorpotenzial $\vec{A}_L$ mit:

$$\begin{aligned} V_L(\vec{x},\, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}',\, t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ \vec{A}_L(\vec{x},\, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}',\, t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \end{aligned} \tag{16}$$

Hierbei sind ρ die Ladungsverteilung und $\vec{j}$ die Stromdichte.

(a) Zeigen Sie, dass die Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V_L}{\partial t} \tag{17}$$

erfüllt ist.
Tipp: Nutze die Kontinuitätsgleichung und die Umformung $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a}\,\varphi) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi$.

(b) In der Vorlesung wurde das Vektorpotenzial $\vec{A}_L(\vec{R},\, t)$ berechnet, wobei $|\vec{R}|$ sehr viel größer als die Ausdehnung der Ladungsverteilung ρ sein soll. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mu_0}{8\pi|\vec{R}|c} \int \mathrm{d}^3x \, [(\vec{x} \cdot \hat{\vec{R}})\, \dot{\vec{j}}(\vec{x},\, t_0) + (\hat{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{j}}(\vec{x},\, t_0))\, \vec{x}] = \frac{\mu_0}{8\pi|\vec{R}|c} \int \mathrm{d}^3x \, \vec{x}\, (\vec{x} \cdot \hat{\vec{R}})\, \ddot{\rho}(\vec{x},\, t_0) \tag{18}$$

mit $\vec{R} = |\vec{R}| \cdot \hat{\vec{R}}$ und $t_0 = t - |\vec{R}|/c$ gilt.
Tipp: Nutzen Sie erneut die Kontinuitätsgleichung.

(c) Zeigen Sie nun abschließend, dass für das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{R},\,t) &= -\vec{\nabla}_{\vec{R}} V_L(\vec{R},\,t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_L(\vec{R},\,t) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{R}|}\,[\hat{\vec{R}}\,(\hat{\vec{R}}\cdot\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}] - \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{R}|c}\,\ddot{\vec{m}}\times\hat{\vec{R}} + \frac{\mu_0}{8\pi|\vec{R}|c}\int \mathrm{d}^3x\,[\hat{\vec{R}}\,(\vec{x}\cdot\hat{\vec{R}})^2 - \vec{x}\,(\vec{x}\cdot\hat{\vec{R}})]\,\dddot{\rho}(\vec{x},\,t_0) + \ldots\end{aligned} \tag{19}$$

gilt. Hierbei sind $\vec{p}$ das elektrische und $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment. Terme der Ordnung $1/|\vec{R}|^2$ und höher sollen vernachlässigt werden.
Tipp: Benutzen Sie die Ergebnisse der Vorlesung.

Viel Spaß!