Übung 11

Anwesenheitsaufgaben (19./20.12.2019)

A 11.1 Lorentztransformation

Von zwei äquivalenten Inertialsystemen K und K' bewege sich K' – von K aus gesehen – in positiver x-Richtung mit der Geschwindigkeit v. Die räumlichen Koordinatenachsen in K und K' sollen parallel zueinander verlaufen und die beiden Nullpunkte zu den Zeiten $t = t' = 0$ zusammenfallen.

(a) Zeigen Sie, dass aufgrund der raum-zeitlichen Isotropie und Homogenität und wegen der Äquivalenz der Intertialsysteme (1. Postulat der Relativität) die allgemeinsten Transformationen zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten (x, y, z, t) und (x', y', z', t') durch die lineare Transformation

$$x' = f(v^2)x - vf(v^2)t;\; t' = g(v^2)t - vh(v^2)x;\; y' = y;\; z' = z \tag{1}$$

mit der Umkehrung

$$x = f(v^2)x' + vf(v^2)t';\; t = g(v^2)t' + vh(v^2)x';\; y = y';\; z = z' \tag{2}$$

gegeben ist, wobei f, g und h Funktionen von v^2 sind. Die x'- und x-Gleichungen sind in ihrer Struktur durch die Definition der Relativbewegung der beiden Intertialsysteme bestimmt, und in den Vorzeichen der Umkehrung spiegelt sich der Rollentausch der beiden Systeme wider.

(b) Zeigen Sie, dass die ursprüngliche Transformation und ihre Umkehrung nur dann miteinander verträglich sind, wenn

$$f = g \text{ und } f^2 - v^2fh = 1 \tag{3}$$

(c) Ein Körper bewege sich in K' mit der Geschwindigkeit u' parallel zur x'-Achse. Zeigen Sie, dass K die zur x-Achse parallele Geschwindigkeit u gegeben ist durch

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'(h/f)} \tag{4}$$

Unter Verwendung des Postulats der universellen Geschwindigkeit c zeigen Sie ferner, dass $h = f/c^2$ gelten muss und dass die Lorentz-Transformation das Ergebnis ist.

A 11.2: Lichtblitze

Betrachten Sie ein Koordinatensystem $\bar{S}$, das zum Zeitpunkt $t = 0$ deckungsgleich mit dem Inertialsystem S ist und sich diesem gegenüber mit der Geschwindigkeit v in positiver z-Richtung bewegt. Im System $\bar{S}$ wird zum Zeitpunkt $\bar{t}_{S1}$ an der Stelle $(\bar{x}_0, 0, 0)$ ein Lichtblitz ausgesandt. Vom selben Ort wird zum Zeitpunkt $\bar{t}_{S2}$ erneut ein Lichtblitz ausgesandt.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten (x_{S1}, y_{S1}, z_{S1}) und die Zeit t_{S1} des Aussenden des ersten Lichtblitzes im System S.

(b) Was ist der Zeitpunkt t_{E1}, an welchem ein im Ursprung von S ruhender Beobachter den ersten Lichtblitz empfängt?

(c) Zu welcher Zeit t_{E2} nimmt derselbe Beobachter den zweiten Lichtblitz wahr?

(d) Wie sieht die Differenz $\delta t = t_{E2} - t_{E1}$ als Funktion der Größen $\bar{t}_{S1}, \bar{x}_0, v$ und $\delta\bar{t}_S = \bar{t}_{S2} - \bar{t}_{S1}$ aus? Berechnen Sie das Verhältnis $\delta t_E/\delta\bar{t}_S$ für den Grenzfall sehr kurz hintereinander ausgesendeter Lichtblitze ($\delta\bar{t}_S \to 0$).

(e) Bestimmen Sie die zeitliche Änderung des Abstandes zwischen Sender und Beobachter im Koordinatenursprung in S zum Zeitpunkt t_{S1}. Ersetzen Sie mit dem erhaltenen Ergebnis die Zeit $\bar{t}_{S1}$ im berechneten Grenzwert der vorherigen Teilaufgabe.

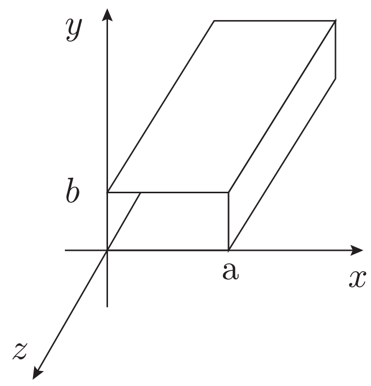

Abbildung 1: Skizze rechteckiger Wellenleiter

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 07.01.2020)

H 11.1: Rechteckiger Wellenleiter

Wir betrachten eine monochromatische Welle, die sich in einen rechteckigen Wellenleiter, mit der Höhe a, der Breite b und $a \geq b$ (siehe Abbildung 1), in z-Richtung ausbreitet. Nehmen Sie an, dass der Wellenleiter ein perfekter Leiter ist, sodass das elektrische Feld auf den Wänden des Leiters verschwindet.

(a) Verwenden Sie die Wellengleichung

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0(x,y)\exp\big(i\,(kz-\omega t)\big) \tag{5}$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}_0(x,y)\exp\big(i\,(kz-\omega t)\big) \tag{6}$$

und die Maxwell-Gleichungen, um die entkoppelten Gleichungen für E_{0z} und B_{0z} zu erhalten:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \big(\omega/c\big)^2 - k^2\right] E_{0z} = 0\,, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \big(\omega/c\big)^2 - k^2\right] B_{0z} = 0\,. \tag{8}$$

(b) Wir betrachten im Folgenden den Fall $B_z = 0$, die auftretenden Wellen heißen „transversale magnetische" Welle (**TM**). Bestimmen Sie mit Hilfe des Seperationsansatz

$$E_z(x,y) = X(x)Y(y) \tag{9}$$

das transversale elektrische Feld. Die Lösung heißt $\mathbf{TM}_{mn}$ Mode.
Tipp: Leiten Sie sich die Randbedingungen darüber her, dass $\vec{E}^{\|} = 0$ auf dem Rand des Leiters gilt.

(c) Geben Sie die Wellenzahl k an und schreiben Sie diese als

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}\,, \tag{10}$$

wobei ω_{mn} als *Cutoff Frequenz* bezeichnet wird. Verwenden Sie diese und bestimmen Sie damit die Phasen-

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k}\,, \tag{11}$$

und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{gr}} = \frac{1}{\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega}\,. \tag{12}$$

H 11.2: Strahlung einer langsamen Punktladung

Betrachten Sie eine Punktladung am Ort $\vec{r}_0(t)$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ (sei $|\vec{v}| \ll c$).

(a) Zeigen Sie für die Ladungs- und Stromdichtenverteilungen, dass

$$\rho(\vec{r}, t) = q\,\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \tag{13}$$

und

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\dot{\vec{r}}_0 \tag{14}$$

gelten.

(b) Zeigen Sie, dass die elektromagnetischen Potentiale in Lorenz-Eichung wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{r}-\vec{r}_0(t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c}} \Bigg|_{t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}} , \\
\vec{A}(\vec{r}, t) &= \Phi(\vec{r}, t)\frac{1}{c}\frac{\vec{v}(t')}{c}\Bigg|_{t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}} .
\end{aligned}$$

Finden Sie dazu in der Delta-Distribution eine geeignete Substitution.

Durch die implizite Retardierung $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}$ sind diese Potentiale kompliziert, da die Retardierung nur eine Bestimmungsgleichung für t' ist, d.h. nicht nach t' aufgelöst ist. Jedoch:

(c) Weit weg von der Ladung ($r \gg |\vec{r}_0|$) vereinfacht sich diese Retardierung zur expliziten Form $t' = t - \frac{r}{c}$. Zeigen Sie, dass mit der zusätzlichen Annahme $v \ll c$ die führenden Terme der beiden Potentiale lauten:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\vec{\beta}_{\text{ret}} \cdot \vec{r} + \mathcal{O}(\vec{\beta}^2_{\text{ret}}) \right\} , \\
\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{1}{r}\vec{\beta}_{\text{ret}} + \mathcal{O}(\vec{\beta}^2_{\text{ret}}) .
\end{aligned}$$

wobei $\vec{\beta}_{\text{ret}} = \frac{\vec{v}(t-r/c)}{c}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Felder lauten

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{1}{r}\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) , \tag{15}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}} \times \hat{e}_r + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \hat{e}_r \times \frac{1}{c}\vec{E} . \tag{16}$$

Die Ladung strahlt also nur, wenn sie beschleunigt wird.

(e) Wie ist die Strahlung polarisiert?

H 11.3: Die Lorentzgruppe

Betrachten Sie den *Minkowski-Raum* $\mathbb{R}^{1,3}$ mit der *Minkowski-Metrik* $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ und dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle \doteq \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = c^2tt' - \vec{x}\cdot\vec{y} \tag{17}$$

für *Vierervektoren*

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Ab jetzt verwenden wir die *Einstein'sche Summenkonvention* und summieren implizit über doppelt vorkommende Indizes (ohne Summenzeichen). Ein Vierervektor wird folgendermaßen klassifiziert

$$\langle x, x\rangle \begin{cases} < 0\ , & \textit{raumartig} \\ = 0\ , & \textit{lichtartig} \\ > 0\ , & \textit{zeitartig}\ . \end{cases}$$

(a) Motivieren Sie die Definition von raum-, licht- und zeitartig.

(b) Warum betrachtet man als Symmetrietransformation von Raum und Zeit nur lineare Abbildungen $x \mapsto \Lambda x$ (in Komponenten $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$)?

(c) Zeigen Sie, dass die Forderung nach Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf

$$\langle x, x\rangle = 0 \implies \langle \Lambda x, \Lambda x\rangle = 0$$

als Bedingung an Λ führt und zeigen Sie, dass diese Bedingung durch

$$\langle \Lambda x, \Lambda y\rangle = a(\Lambda)\langle x, y\rangle$$

mit einem Faktor $a(\Lambda)$, der von Λ abhängen kann, erfüllt wird.

(d) Warum darf man $a(\Lambda) = 1$ setzen?

Man kann zeigen, dass die Bedingungen in c) äquivalent sind. Daher nennt man eine lineare Abbildung $\Lambda : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3}$ *Lorentztransformation*, falls

$$\langle x, y\rangle = \langle \Lambda x, \Lambda y\rangle \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^{1,3}\ . \tag{19}$$

(e) Folgern Sie die *Isometriebedingung*

$$\Lambda^T g \Lambda = g \tag{20}$$

und vergleichen Sie mit der für orthogonale Matrizen.

(f) Wie kann man räumliche Drehungen als Lorentztransformation interpretieren?

(g) Zeigen Sie, dass die diskreten Transformationen Zeitumkehr $T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ und Parität $P = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ Lorentztransformationen sind.

(h) Folgern Sie aus der definierenden Eigenschaft in Gleichung (19), dass $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$ und $\det \Lambda = \pm 1$.

(i) Was bedeutet $\Lambda^0{}_0 < 0$?

(j) Zeigen Sie, dass die Lorentztransformation eine Gruppe bilden, und zwar die sog. *Lorentzgruppe* $\mathcal{L} = O(1, 3)$, welche in vier Zweige zerfällt:

$$\begin{array}{lrl} \mathcal{L}_+^\uparrow : & \Lambda^0{}_0 \geq 1 & ,\ \det\Lambda = +1 \\ \mathcal{L}_-^\uparrow : & \Lambda^0{}_0 \geq 1 & ,\ \det\Lambda = -1 \\ \mathcal{L}_-^\downarrow : & \Lambda^0{}_0 \leq -1 & ,\ \det\Lambda = -1 \\ \mathcal{L}_+^\downarrow : & \Lambda^0{}_0 \leq -1 & ,\ \det\Lambda = +1 \end{array}$$

Wenn $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ so heißt Λ *orthochron*, ist $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ so *antichron*. Falls $\det \Lambda = +1$, so nennt man Λ *eigentlich*, entsprechend für $\det \Lambda = -1$ *uneigentlich*. Die Gruppe der eigentlichen Lorentztransformationen $\mathcal{L}_+ \doteq \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ ist $SO(1, 3)$.

(k) Wie erhält man aus der eigentlich orthochronen Gruppe die anderen Zweige?

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!