Übung 12

Anwesenheitsaufgaben (09./10.01.2020)

A 12.1: Kontra- und Kovarianz

Aus der Vorlesung kennen Sie den Raum $\mathbb{R}^{1,3}$ mit der Minkowskimetrik $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ und Skalarprodukt $\langle x, x'\rangle := \sum_{\mu\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\mu x'^\nu$ für Vierervektoren $x^{\text{kontra}} = (x^0, -\vec{x})^T$. Wir bezeichnen Abbildungen $x \mapsto \Lambda x$, in Komponenten: $x^\mu \mapsto \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu =: \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ als Lorentztransformationen, wenn $\langle \Lambda x, \Lambda y\rangle = \langle x, y\rangle$, was auf $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ als Bedingung an Λ führt. Weiter wissen wir, dass die so definierten Vierervektoren *kontravariant* genannt werden.
An dieser Stelle wollen wir das Ganze etwas mathematischer betrachten und gehen dafür erstmal einen Schritt zurück: Der Vierervektor x ist Element eines n-dimensionalen Vektorraum V, für den wir die Basis als $\{\hat{e}_{(0)}, \dots, \hat{e}_{(n-1)}\}$ schreiben können. Folglich kann jeder Vektor v in V geschrieben werden als $v = v^\mu \hat{e}_{(\mu)}$ unter Verwendung der *Einsteinschen Summenkonvention.*
Der *duale Vektorraum* V^* ist der Raum der linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$ mit der *dualen Basis* $\{\hat{e}^{(0)}, \dots, \hat{e}^{(n-1)}\}$, die definiert ist durch

$$\hat{e}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) = \delta^\mu_\nu \,. \tag{1}$$

Wir führen eine symmetrische[1] *Bilinearform* $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ (d.h. β ist eine Funktion, die linear in beiden Argumenten ist) ein, mit der wir einen *Isomorphismus* $\phi : V \to V^*$ definieren können durch

$$\phi(v) = \beta(v, \cdot)\,, \quad \text{sodass} \quad [\phi(v)](w) = \beta(v, w) \text{ für alle } w \in V\,.$$

Aus dieser Definition folgt weiter, dass $\phi(v)$ eine lineare Abbildung $\phi(v) : V \to \mathbb{R}$ ist.
Analog führen wir auch für den dualen Vektorraum eine *Bilinearform* $\beta^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ ein, welche gegeben ist durch

$$\beta^*(\phi(v), \phi(w)) = \beta(v, w)\,. \tag{2}$$

Um die Notation zu vereinfachen, führen wir die folgende Schreibweise

$$\beta_{\mu\nu} = \beta(\hat{e}_{(\mu)}, \hat{e}_{(\nu)})\,, \qquad \beta^*(\hat{e}^{(\mu)}, \hat{e}^{(\nu)}) = \beta^{*\mu\nu} \tag{3}$$

ein.

(a) Es sei der Vektor $v = v^\mu \hat{e}_{(\mu)} \in V$ gegeben, zeigen Sie, dass der dazu duale Vektor $\tilde{v} = \phi(v)$ gegeben ist durch

$$\tilde{v} = \tilde{v}_\mu \hat{e}^{(\mu)} \quad \text{mit} \quad \tilde{v}_\mu = \beta_{\mu\nu} v^\nu\,. \tag{4}$$

Die Koordinaten $\tilde{v}_\mu$ werden dann *kovariante* Koordinaten genannt (meist findet man in der Literatur die Vektoren ohne Tilde).

(b) Zeigen Sie, dass $\left(\beta_{\mu\nu}\right) = \left(\beta^{*\mu\nu}\right)^{-1}$ erfüllt ist.
Hinweis: $\left(\beta^{*\mu\nu}\right)^{-1}$ meint die Komponenten der inversen Matrix von β.

Eine kanonische Wahl für die Bilinearform β ist die Metrik η, diese haben Sie bereits in der Vorlesung kennengelernt. Die Metrik mit oben stehenden Indizes $\eta^{\mu\nu}$ ist, wie in der (b) gezeigt wurde, definiert als Komponenten der inversen Matrix von η, das bedeutet

$$(\eta^{\mu\nu}) = \left(\eta_{\mu\nu}\right)^{-1}\,. \tag{5}$$

In der speziellen Relativitätstheorie und damit für uns gilt $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.
In den ersten Teilen der Aufgabe haben wir gesehen, dass die *kovariant Komponenten* gegeben sind durch

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu\,. \tag{6}$$

[1] Symmetrisch bedeutet, dass $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ gilt.

Wir verwenden dies nun auf unser Wissen für kontravariaten Vektoren an: Der zu x zugehörige *kovariante* Vektor ist gegeben durch

$$x_{\text{kov}} = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = x^T \eta\,. \tag{7}$$

Damit gilt dann

$$\langle x, x' \rangle = x_{\text{kov}} \cdot x' = x_\mu x'^\mu = x'_\mu x^\mu = x'_{\text{kov}} \cdot x. \tag{8}$$

Im Allgemeinen kann die Metrik genutzt werden, um Indizes nach oben und unten zu "ziehen", wobei das nach oben ziehen analog definiert ist mit $\eta^{\mu\nu}$ (wir können den * vernachlässigen).
Im weiteren Verlauf der Aufgabe wollen wir uns anschauen wie sich kovariante Vektoren unter Lorentztransformation verhalten.

(c) Schreiben Sie die Bedingung $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ in Komponenten aus: $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda = \eta_{\kappa\lambda}$.

(d) Zeigen Sie

$$\langle x, x \rangle = x_{\text{kov}} \eta^{-1} x_{\text{kov}}^T = \eta^{\mu\nu} x_\mu x_\nu\,. \tag{9}$$

(e) Zeigen Sie, dass bei einer Lorentztransformation $x_{\text{kov}} \mapsto x_{\text{kov}} \Lambda^{-1}$ gilt. Zeigen Sie für die inverse Matrix in Komponenten: $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\alpha \eta^{\alpha\mu} =: \Lambda_\nu{}^\mu$, d.h. $x_\mu \mapsto \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$.

(f) Wir definieren die Ableitungen $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ und $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Zeigen Sie, dass sich die Ableitung nach kontravarianten Koordinaten als kovarianter Vierervektor transformiert ("ein oberer Index im Nenner ist ein unterer Index") und umgekehrt.

Im letzten Teil der Aufgabe wollen wir die obigen Definitionen von kovarianten Komponenten erweitern. Hierzu definieren wir uns einen (k, l)-Tensor T (der Stufe $k + l$) als multilineare Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\text{k−mal}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{l−mal}} \to \mathbb{R}\,,$$

mit den Komponenten

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = T\left(\hat{e}^{(\mu_1)}, \ldots, \hat{e}^{(\mu_k)}, \hat{e}_{(\nu_1)}, \ldots, \hat{e}_{(\nu_l)}\right)\,.$$

Der Raum, den die Menge der (k, l)-Tensoren aufspannen, bildet einen Vektorraum, genauer

$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{\text{k−mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{\text{l−mal}}\,,$$

wobei $\otimes$ das Tensorprodukt (der Vektorräume) darstellt. Die Dimension des Vektorraums ist dann folglich n^{k+l}.

(g) Zeigen Sie, dass die Komponenten eines (k, l)-Tensor T unter Lorentztransformationen Λ wie folgt transformieren

$$T^{\mu'_1 \ldots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \ldots \nu'_l} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu_1}{}_{\nu'_1} \cdots \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu_l}{}_{\nu'_l} \Lambda^{\mu'_1}{}_{\mu_1} \ldots \Lambda^{\mu'_k}{}_{\mu_k} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}\,. \tag{10}$$

Somit transformiert ein Tensor mit zwei kontravarianten Indizes

$$T^{\mu\nu} \mapsto \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}, \quad \text{d.h. } T \mapsto \Lambda T \Lambda^T. \tag{11}$$

(h) Zeigen Sie für den Wellenoperator, dass $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu$ und folgere seine Lorentzinvarianz, d.h. er transformiert als Skalar. Man kann den Wellenoperator als Minkowski-Laplaceoperator interpretieren, die Drehinvarianz von Δ mutiert dabei zur Lorentz-Invarianz von $\Box$. Zeigen Sie weiter, dass die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ als (0,2)-Tensor transformiert.

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 14.01.2020)

H 12.1: Boosts

Hier diskutieren wir die physikalische Bedeutung der Lorentz-Transformation.

(a) Wieso erhält eine spezielle Galileitransformation nicht den Raumzeit-Abstand?

(b) Wie muss nun solch ein Boost modifiziert werden? Betrachten Sie dazu einen Boost mit Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ in einer Koordinatenrichtung und nutzen Sie die Isometriebedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$ (die Erhaltung des Raumzeitabstands) aus. Führen Sie dabei den "Pseudowinkel" (*Rapidität*) $\theta = \text{arctanh}\beta = \text{arccosh}\gamma$ ein , wobei $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$.

(c) Zeigen Sie, dass ein Boost als eine Drehung um $i\theta$ interpretiert werden kann.

(d) Leiten Sie das Additionstheorem für zwei parallele Geschwindigkeiten her. Multiplizieren Sie dazu die Matrizen zweier paralleler Boosts.

(e) In welcher Größe ist die Hintereinanderausführung von Boosts additiv?

H 12.2: Kovarianz und der (duale) Feldstärketensor

Im ersten Teil dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die zunächst rein formal eingeführten Vektoren $j^\mu = (c\rho, -\vec{j})^T$ und $A^\mu = (\phi, -c\vec{A})^T$ in der Tat physikalische Vierer-Vektoren darstellen, d. h. sich unter Wechsel des Inertialssystems mittel einer Lorentztransformation Λ (oder allgemeiner Poincarétransformation) transformieren wie die Koordinaten, $x \mapsto x' = \Lambda x$, also

$$j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)\,, A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu(x)\,. \tag{12}$$

(a) Argumentieren Sie über die Kontinuitätsgleichung, dass j^μ ein kontravarianter Vierer-Vektor ist.

(b) Zeigen Sie in Lorenzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, dass sich die Maxwellgleichungen als $\Box A^\mu(x) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} j^\mu(x)$ schreiben lassen. Folgern Sie daraus, dass A genau dann ein Vierervektor ist wenn j ein Vierervektor ist.

(c) Wieso gilt dann die Lorenzeichung in jedem Inertialsystem? Wie lauten die Maxwellgleichungen in einem anderen Inertialsystem?

Da nun die Potentiale zu einem Vierervektor in der speziellen Relativitätstheorie vereint wurden, gilt entsprechendes für die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Dies erfolgt durch Einführung des sogenannten Feldstärketensors F mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

(d) Zeigen Sie, dass aus der Wellengleichung für A^μ die inhomogenen Maxwellgleichungen folgen,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} j^v(x)\,. \tag{13}$$

Zeigen Sie ebenso die homogene Maxwellgleichung $\partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} + \partial_\kappa F_{\mu\nu} = 0$.

(e) Wie lautet die vier-dimensionale Formulierung einer Eichtransformation des Potentials A^μ? Wie transformiert sich F?

(f) Schreiben Sie den elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ als Matrix und drücken Sie die Einträge durch die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{14}$$

Welche Symmetrien hat dieser Tensor? Zählen Sie die Anzahl der unabhängigen Einträge.

(g) Wie transformiert sich $F^{\mu\nu}$ unter Lorentztransfomationen? Warum können daher weder $\vec{E}$ noch $\vec{B}$ Teil eines Vierervektors sein?

(h) Definieren Sie den dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ als

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{15}$$

mit dem total antisymmetrischen Pseudotensor

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine gerade Permutation on } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine ungerade Permutation on } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ 0, & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases} \tag{16}$$

Wie lauten die Komponenten von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ und wie transformiert $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ unter Lorentztransformationen? Was ist das entsprechende Transformationsgesetz für $\tilde{F}^{\mu\nu}$? Warum ist auch $\tilde{F}$ eichinvariant?

(i) Zeigen Sie, dass die homogenen Maxwellgleichungen $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(x) = 0$ lauten. Schreiben Sie diese Gleichungen so um, dass sie nur noch den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ enthalten. Zeigen Sie, dass die Maxwellgleichungen tatsächlich lorentzinvariant sind. Was dürfte auf der rechten Seite außer Null sonst stehen?

(j) Welche Transformation bildet F und $\tilde{F}$ aufeinander ab?

Viel Spaß!