# Übung 13

## Anwesenheitsaufgaben (16./17.01.2020)

### A 13.1: Relativistische Kinematik

In dieser Aufgabe sollen einige Konzepte der relativistischen Kinematik eingeführt werden. Diese Kenntnisse sind vor allem zur Analyse hochenergetischer Teilchenkollisionen essentiell. Hierzu müssen insbesondere die Begriffe von Energie und Impuls abgeändert werden, die in der speziellen Relativitätstheorie in einen physikalischen Vierer-Vektor vereinheitlicht werden. Ebenso ist es notwendig, adäquate Größen einzuführen, die vom Bezugssystem unabhängig sind, wie z.B. die Mandelstam-Variablen. Die relativistische Wirkung eines Punktteilchens der Masse $m$ lautet

$$S_{\mathrm{mat}} = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\sigma}(\sigma)\frac{dx_\mu}{d\sigma}(\sigma)} d\sigma \,, \tag{1}$$

wobei $\sigma \mapsto x^\mu(\sigma)$ eine beliebige Parametrisierung bezeichnet.

(a) Wählen Sie die Parametrisierung nach der Zeit, d.h. $\sigma = t$. Wie transformiert sich die Wirkung unter $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$ für einen konstanten Vierer-Vektor $a^\mu$? Berechnen Sie aus dem Noether-Theorem[1] die zugehörigen Erhaltungsgrößen und interpretieren Sie diese. Definieren Sie hierzu

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \frac{dx^\mu}{dt} \,. \tag{2}$$

(b) Wie transformiert $p^\mu$ unter Lorentztransformationen? Zeigen Sie, dass $p^\mu p_\mu$ unter Lorentztransformationen invariant ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \tag{3}$$

und

$$cp_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \,. \tag{4}$$

(c) Zeigen Sie, dass $p$ zeitartig ist und damit, dass es ein Bezugssystem gibt, so dass gilt $p'^\mu = (p'_0, 0)$. Begründen Sie den Namen "Center of Mass System", oder kurz CMS. Schreiben Sie hierzu $p'_0 \equiv p_0^{\mathrm{cms}} = \sqrt{p^\mu p_\mu}$. Was gilt für $m = 0$?

Betrachten Sie nun eine elastische Zweiteilchen-Reaktion

$$(m_1, \vec{p}_1) + (m_2, \vec{p}_2) \to (m_3, \vec{p}_3) + (m_4, \vec{p}_4) \,, \tag{5}$$

wobei die Energie-Impulserhaltung gelten soll:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \,. \tag{6}$$

Definieren Sie nun die Lorentz-invarianten *Mandelstam-Variablen* durch

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^\mu(p_1+p_2)_\mu = (p_3+p_4)^\mu(p_3+p_4)_\mu && (7)\\ t &= (p_1-p_3)^\mu(p_1-p_3)_\mu = (p_2-p_4)^\mu(p_2-p_4)_\mu && (8)\\ u &= (p_1-p_4)^\mu(p_1-p_4)_\mu = (p_2-p_3)^\mu(p_2-p_3)_\mu \,. && (9)\end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie $s$, $t$ und $u$ als Ausdrücke in den Massen $m_i$, des Impules $\vec{p}_i$ und der Energie $E_i$ und zeigen Sie, dass

$$s + t + u = c^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) \,, \tag{10}$$

d.h. $s$, $t$ und $u$ sind nicht unabhängig.

(e) Zeigen Sie, dass $s = (p_0^{\mathrm{cms}})^2 = \frac{1}{c^2}E^{\mathrm{cms}}$ gilt.

[1] Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

## Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 21.01.2020)

## H 13.1: Eindeutigkeit der Elektrodynamik

(a) Schreiben Sie den dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ als Matrix

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & cB_1 & cB_2 & cB_3 \\ -cB_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -cB_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -cB_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass sich nur zwei eichinvariante Lagrangedichten aus Feldtensoren der Elektrodynamik bilden lassen.

(b) Zeigen Sie folgende Identitäten

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 2c^2\vec{B}^2 - 2\vec{E}^2 , \quad F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4c\vec{E}\cdot\vec{B} . \tag{12}$$

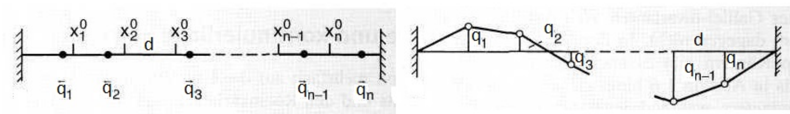
(c) Was passiert unter Lorentztransformationen und welche physikalische Konsequenz ergibt sich für die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$.

(d) Untersuchen Sie das Verhalten der Terme jeweils unter Zeitumkehr $t \to -t$, Paritätstransformation (Spiegelung) $\vec{r} \to -\vec{r}$ und Ladungskonjugation $j \to -j$, d.h. $\left(\rho, \vec{j}\right) \to \left(-\rho, -\vec{j}\right)$.

(e) Zeigen Sie, dass sich der zweite Term $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ als totale Divergenz eines Vierer-Vektors schreiben lässt. Daraus folgt, dass falls wir diesen Term zur Lagrangedichte hinzu addieren, sich die Bewegungsgleichungen nicht geändert werden.

## H 13.2: Lagrange Mechanik von Feldern - Kontinuumsmechanik

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Maxwellsche Theorie der Elektrodynamik als Spezialfall der Theorie von klassischen Feldern verstanden werden kann. Um die hierbei notwendigen Konzepte besser zugänglich zu machen, werden wir Felder $\phi(\vec{x}, t)$ als Kontinuums-Limes eines diskreten Systems einführen. Später kann dann durch Analogiebetrachtung auch das Vektorpotential $A(\vec{x}, t)$ als Feld verstanden werden. Betrachten Sie eine Kette der Länge $L$ bestehend aus $n$ identischen Massepunkten der Masse $m$, die über masselose Federn mit Federkonstante $D$ miteinander verbunden sind. Der Ruhepunkt der Massen sei mit $x_i^0$, $i = 1, \ldots, n$ bezeichnet und




der Abstand $x_{i+1}^0 - x_i^0$, $i = 1, \ldots, n-1$ sei $d$. Wir betrachten nun entweder rein longitudinale oder rein transversale Auslenkungen mit $q_i(t) = x_i(t) - x_i^0(t)$. Die Endpunkte sind fix, d.h. $q_0(t) = \dot{q}_0(t) = q_{n+1}(t) = \dot{q}_{n+1}(t) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für kleine Auslenkungen $q_i(t)$ die Lagrange-Funktion $L = T - V$ in beiden Fällen dieselbe Form annimmt:

$$L = \frac{1}{2}m\sum_{i=0}^{n}(\dot{q}_i(t)^2 - \omega_0^2(q_{i+1} - q_i)^2) \tag{13}$$

Hierbei ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ für longitudinale und $\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{md}}$ für transversale Schwingungen. Hierbei bezeichnet $S$ die Federspannung.
*Tipp:* Für die Federspannung gilt $S = D(d - l_0)$ in der transversalen Richtung, wobei $l_0$ die Ruhelänge der Feder ist.

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen und zeigen Sie durch Einzetzen, dass die Lösungen gegeben sind durch

$$q_j(t) = A\sin\left(j\frac{p\pi}{n+1}\right)e^{i\omega_p t} , \tag{14}$$

mit $p \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Frequenzen $\omega_p$ lauten

$$\omega_p = 2\omega_0 \sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right) . \tag{15}$$

Nun führen wir den Kontinuums-Limes durch und erhalten so eine schwingende Saite. Hierzu betrachten wir den Doppel-Limes $n \to \infty$, $d \to 0$, so dass $dn =$ konst. Im Kontinuums-Limes wird der diskrete Parameter $i$ durch die kontinuierliche Variable $x$ ersetzt und die Auslenkung des $i$-ten Teilchens $q_i(t)$ durch das *Feld* $\phi(t,x)$ beschrieben als

$$q_i(t) = \phi(t,x)\big|_{x=id} . \tag{16}$$

Hier haben wir den linken Aufhängepunkt der Kette in den Koordinatenursprung gelegt.

(c) Argumentieren Sie, dass im Kontinuums-Limes gilt

$$q_{i+1} - q_i = d\tfrac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=id+d/2} , \quad q_i - q_{i-1} = d\tfrac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=id-d/2} , \tag{17}$$

$$q_{i+1} - q_i - (q_i - q_{i-1}) = d^2\tfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{x=id} . \tag{18}$$

(d) Wie lautet dann die Bewegungsgleichung? Führen Sie hierzu die Massendichte $\rho = m/d$, das Elastizitätsmodul $\eta = Dd$ und die Wellengeschwindigkeit $v^2 = \eta/\rho$ ein (transverale Schwingung: $v^2 = S/\rho$), so dass gilt

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 . \tag{19}$$

Zeigen Sie weiter aus (15), dass für die Frequenz $\omega_p$ nun $\omega_p = \omega_0' p$ gilt. $\omega_0'$ nennt man daher auch *Grundfrequenz.*

(e) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion im Kontinuums-Limes. Ersetzen Sie hierzu $d$ durch das infinitesimale Integrationsmaß $\mathrm{d}x$ und erhalte daraus

$$L = \int_0^L \mathrm{d}x\ \mathcal{L} , \quad \mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}^2 - v^2\frac{\partial\phi}{\partial x}^2\right] . \tag{20}$$

Die Funktion $\mathcal{L}$ bezeichnet die *Lagrange-Dichte.*

(f) Begründen Sie, dass sich das Hamiltonsche Prinzip dann ergibt als $\delta S[\phi] = 0$ für beliebige Feldvariation $\delta\phi$ mit $\delta\phi = 0, \delta(\partial\phi) = 0$ für $t = t_0, t_1$ bei $x = 0, L$. Leiten Sie für eine allgemeine Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left[\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi\right]$ die Euler-Langrange Gleichungen her. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen (19) aus (20) folgen.

(g) Begründen Sie die Definition für den kanonischen Impuls und die *Hamilton Dichte*

$$\pi(x,t) = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} , \quad \mathcal{H} = \dot\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} - \mathcal{L} . \tag{21}$$

Wie lautet dann die Hamilton-Funktion $H$. Berechnen Sie $\mathcal{H}$ für (20).

Viel Spaß!