Übung 14

Anwesenheitsaufgaben (23./24.01.2020)

A 14.1: Noether - Theorem für Felder

In dieser Aufgabe beschränken wir uns auf die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x, A, \partial_\mu A) = -\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \tag{1}$$

Nun betrachten wir die kontinuierliche Transformation

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu , \tag{2}$$

mit infinitesimalem δx^μ und die daraus resultierende Transformation der Felder

$$\begin{aligned} A_\nu(x) \to \tilde{A}_\nu(x + \delta x) &= A_\nu(x) + \delta A_\nu(x) \\ &= A_\nu(x) + \partial_\mu A_\nu(x) \delta x^\mu . \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Transformation ist eine Symmetrie-Transformation, wenn sich die Lagrange-Dichte nur um eine Viererdivergenz eines Vektorfeldes K^μ ändert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, A, \partial_\mu A) \to \mathcal{L}(\tilde{x}, A, \partial_\mu A) &= \mathcal{L}(x, A, \partial_\mu A) + \delta\mathcal{L}(x, A, \partial_\mu A) \\ &= \mathcal{L}(x, A, \partial_\mu A) + \partial_\mu K^\mu . \end{aligned} \tag{4}$$

a) Wir können die Änderung $\delta\mathcal{L}$ der Lagrange-Dichte einmal durch die Änderung der Felder δA_μ und einmal durch die Änderung der Koordinaten δx^μ aus drücken. Es ist dann

$$\mathcal{L}(\tilde{x}, A, \partial_\mu A) = \mathcal{L}(x, \tilde{A}, \partial_\mu \tilde{A}) . \tag{5}$$

Taylor-entwickeln Sie beide Seiten dieser Gleichung und zeigen Sie, dass

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu\right)} \delta A_\nu - \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0 . \tag{6}$$

b) Zeigen Sie aus Glg. (6), dass die Viererdivergenz des kanonischen Energie-Impuls-Tensor

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \mathcal{L} g^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\sigma\right)} \partial^\nu A_\sigma \tag{7}$$

verschwindet.

Hausaufgaben (Abgabe: Mappen vor dem Raum W 2.013 am 28.01.2020 bis 12:00)

H 14.1: Energie-Impuls Tensor

Für einen Tensor $A^{\mu_1 \cdots \mu_k}$ k-ter Stufe mit $\partial_{\mu_1} A^{\mu_1 \cdots \mu_k} = 0$ sind folgende Integrale über eine räumliche Fläche zeitliche Konstanten der Bewegung

$$Q^{\mu_2 \cdots \mu_k} := \int_{x_0 = ct} A^{0 \mu_2 \cdots \mu_k} d^3 x . \tag{8}$$

Als ein Beispiel eines solchen Tensors zweiter Stufe ist der *Energie-Impuls-Tensor* $\tilde{T}^{\mu\nu}$. Diesen haben wir bereits in Gleichung (7) kennengelernt. In dieser Aufgabe wollen wir nun den symmetrischen *Energie-Impuls-Tensor* $T^{\mu\nu}$ näher betrachten. Dieser ist definiert durch

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \tilde{T}^{\mu\nu} + \epsilon_0 \partial_\lambda F^{\mu\lambda} A^\nu \\ &= \epsilon_0 \left[F_{\alpha\lambda} F^{\lambda\nu} \eta^{\alpha\mu} + \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \eta^{\mu\nu} \right] . \end{aligned} \tag{9}$$

a) Welche Transformations- und Symmetrieeigenschaften besitzt $T^{\mu\nu}$? Berechnen Sie die Spur T^{μ}_{μ}.

b) Zeigen Sie, dass gilt $\partial_\mu T^{\mu\nu} = f^\nu := \frac{1}{c} j_\mu F^{\mu\nu}$. Wie lautet die Gleichung für $\nu = 0$? Was gilt für den Fall des elektromagnetischen Feldes im Vakuum, d. h. $j^\mu = 0$? Geben Sie die Erhaltungsgrößen an.

c) Zeigen Sie, dass die *Energiedichte* $\epsilon(\vec{x}, t) := T^{00}$ gegeben ist durch

$$\epsilon(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \,. \tag{10}$$

Warum macht die Interpretation als Energiedichte Sinn? Vergleichen Sie mit der Definition der Hamiltondichte aus H 13.2.

d) Zeigen Sie, dass auch gilt

$$T^{0i} = S^i / c \,, \tag{11}$$

wobei $\vec{S}$ den *Poynting-Vektor* $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{E} \times \vec{B} \right]$ bezeichnet. Er wird als Energiestromdichte interpretiert.

H 14.2: Lagrangedichte der Elektrodynamik

In dieser Aufgabe wollen wir die Maxwell Gleichungen aus der Lagrangedichte der Elektrodynamik herleiten. Betrachten Sie zuerst die folgende Wirkung des elektromagnetischen Feldes

$$S_{\text{em}} = \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0}{4} \int \; \mathrm{d}^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{12}$$

mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}$.

a) Zeigen Sie, dass in Lorenz-Eichung (d.h. $\partial_\mu A^\mu = 0$) folgt, dass $\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{\epsilon_0}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu$.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und vergleichen Sie diese mit der Kette aus Aufgabe H 13.2.

c) Leiten Sie die quellenfreien Maxwell Gleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ her.

Da eine vollständige Theorie der Elektrodynamik auch die Wechselwirkung zwischen Quellen und Feldern berücksichtigen sollte, müssen wir unsere Lagrangedichte um den Term $\frac{1}{c} j_\mu A^\mu$ ergänzen. Somit ist die Wirkung der Elektrodynamik gegeben durch

$$S_{\text{em}} = \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{\epsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu \right) \,. \tag{13}$$

Zur Erinnerung: Der elektromagnetische Feldstärketensor ist gegeben durch

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{14}$$

d) Leiten Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung und der Langrangedichte der Elektrodynamik die inhomogenen Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \,, \tag{15}$$

her.

e) Zeigen Sie die Bianchi-Identität für den elektromagnetischen Feldstärketensor

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \,, \tag{16}$$

um die homogenen Maxwell Gleichungen herzuleiten

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,. \tag{17}$$

f) Wie verändern sich die Maxwell Gleichungen, falls die elektromagnetische Lagrangedichte $\mathcal{L}$ um $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ ergänzt wird?

Viel Spaß!