Übung 2

Anwesenheitsaufgaben (17./18.10.2019)

In der ersten Aufgabe schauen wir uns die Eigenschaften der δ-Distribution genauer an. In der zweiten Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Differentialoperatoren der Vektoranalysis.

A 2.1: Eigenschaften der δ-Distribution

Wir definieren die δ-Distribution $\delta(x)$ durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; f(x)\delta(x) = f(0)\,. \tag{1}$$

Dies soll für alle Funktionen $f(x)$ gelten. Beweisen Sie nun die folgenden Eigenschaften:

(a) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \delta(x) = 1\,. \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,, \tag{3}$$

wobei a eine Konstante ist.

(c) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \delta\left(f(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x - x_i)}{|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)|} \;\;, \tag{4}$$

wenn $f(x)$ einfache Nullstellen bei $x = x_1, \ldots, x_N$ besitzt.

(d) Berechnen Sie die "Ableitung der δ-Funktion"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; f(x) \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x)\,. \tag{5}$$

(e) Zeigen Sie

$$\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2\,|a|}\left(\delta\left(x-a\right) + \delta\left(x+a\right)\right)\,. \tag{6}$$

A 2.2 Gradient, Divergenz und Rotation

Eine zentrale Rolle in der Elektrodynamik spielen das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$. Sie genügen den sogenannten Maxwellgleichungen, welche mit Hilfe von Differentialoperatoren formuliert sind. Im Rahmen dieser Aufgaben sollen die Definition und einige Eigenschaften gängiger Differentialoperatoren studiert werden.

Sei $\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist das Gradientenfeld von Φ wie folgt definiert:

$$\mathrm{grad}\;\Phi(x) = \boldsymbol{\nabla}\Phi(x) = \left(\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^n}\right)^T\,. \tag{7}$$

Ist weiterhin $\vec{e}_i, i = 1, \ldots, n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$,$\vec{V} = \sum_{i=1}^n V^i(x)\vec{e}_i$ ein Vektorfeld, so ist die Divergenz dieses Vektorfeldes definiert als

$$\operatorname{div} \vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} V^i(x)\,. \tag{8}$$

Wenn $\vec{V} = \nabla\Phi(x)$ ein Gradientenfeld ist, so ist seine Divergenz gleich $\Delta\Phi(x)$, wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}$ der Laplace-Operator ist.
Andererseits ist die Rotation eines Vektorfeldes nur dann wieder ein Vektorfeld, wenn die Dimension 3 ist. Im $\mathbb{R}^3$ hat man

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V}, \tag{9}$$

wobei

$$(\nabla \times \vec{V})^i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial V^k}{\partial x^j}. \tag{10}$$

Es sei nun im $\mathbb{R}^3$ $\vec{x} = (x, y, z)^T$ der Ortsvektor, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor und $r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Skalarfelder $\Phi(\vec{x})$ mit

$$\begin{aligned} i) &\quad \Phi(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} \\ ii) &\quad \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die Divergenz der folgenden Vektorfelder $\vec{V}(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} i) &\quad \vec{V}(\vec{x}) = \vec{x} \\ ii) &\quad \vec{V}(\vec{x}) = r\vec{a} \\ iii) &\quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r} \end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder $\vec{V}(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} i) &\quad \vec{V}(\vec{x}) = \vec{x} \\ ii) &\quad \vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz + 12xy \\ xz - 8yz^2 + 6x^2 \\ xy - 12y^2z^2 \end{pmatrix} \\ iii) &\quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{a} \times \vec{x} \end{aligned}$$

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 22.10.2019)

In der Hausaufgabe vertiefen wir das Wissen zur δ-Distribution und zur Vektoranalysis. Bevor wir die Greensche Funktion als Lösung der Laplacegleichung einführen.

H 2.1 Mehrdimensionale δ-Distribution

Wir definieren die drei-dimensionale δ-Distribution $\delta_{\vec{a}}$ als

$$\delta_{\vec{a}}[f] = \int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{a})d^3r = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

(a) Stellen Sie $\delta(\vec{r}-\vec{a})$ in kartesischen Koordinaten, Kugel- und Zylinderkoordinaten dar.

(b) Was ist die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ von N Punktladungen bei $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$?

(c) Nutzen Sie die Deltadistribution in Kugelkoordinaten um die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ einer homogen geladenen Kugelschale vom Radius R mit Ladung Q anzugeben.

(d) Was ist $\rho(\vec{r})$ einer homogen gelandene Zylinderfläche vom Radius R?

(e) Bestimmen Sie die Ladungsverteilung eines homogen geladenen Diskus vom Radius R von zu vernachlässigender Dicke in Zylinder wie auch Kugelkoordinaten.

H 2.2 Identitäten der Vektoranalysis

Es sei $\Phi(\vec{x})$ ein Skalarfeld und $\vec{A}(\vec{x})$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad})\,\Phi = 0$

(b) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$

(c) $\mathrm{div}\,(\Phi\vec{A}) = \Phi\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\,\mathrm{grad}\,\Phi$

(d) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

H 2.3 Greensche Funktion der Laplacegleichung

Die Greensche Funktion $G(\vec{r})$ der Laplacegleichung für den Raum $\mathbb{R}^3$ ist diejenige Distribution, die $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ erfüllt und im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ abfällt.

(a) Zeigen Sie:

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r}\,, \tag{12}$$

dass heißt

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}). \tag{13}$$

Tipp: Nutzen Sie für $G(\vec{r})$ einen Potenzreihenansatz und die Darstellung in Kugelkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\cdot Winkelableitungen$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass das Faltungsintegral mit der Greenschen Funktion

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} d^3r' \tag{14}$$

die Poissongleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$ löst. Inwieweit ist die Lösung eindeutig?

Viel Spaß!