Übung 3

Anwesenheitsaufgaben (24./25.10.2019)

Die erste Aufgabe ist ein Beispiel zur Anwendung von Spiegelladungen zur Findung eines elektrischen Potentials. In der zweiten Aufgabe werden die elektrische Feldstärke und das Potential einer statischen Ladungsverteilung berechnet. In der dritten Aufgabe wird die Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten für eine gegebene Anordnung gelöst.

A 3.1 Punktladung vor einer Metallwand (Spiegelladung I)

Eine Möglichkeit der Lösung der Poissongleichung mit vorgegebenen Randbedingungen für ein Volumen V besteht darin, außerhalb von V, an von der Geometrie des Problems abhängigen Stellen, fiktive (Spiegel-)Ladungen anzubringen. Wir betrachten dazu folgendes Beispiel: Eine Punktladung Q sei am Ort $\vec{r}_Q = (0, 0, a)$, und eine unendlich große *geerdete* Metallplatte liege in der xy-Ebene. Das heißt bei $z = 0$ soll das elektrostatische Potential Φ verschwinden.

(a) Wie lauten die Randbedingungen?
Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem durch $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} - \frac{Q}{|\vec{r}+\vec{r}_Q|}\right)$ gelöst wird, wobei $\vec{r}$ in dem Halbraum liegen soll, in dem sich die Ladung befindet.

(b) Wie sieht das Potential im anderen Halbraum aus? Wie kann man das Zustandekommen des Potentials im positiven Halbraum anschaulich interpretieren?

(c) Zeigen Sie, dass die Oberflächenladungsverteilung aufgrund von Influenz auf der Platte durch den Sprung des elektrischen Feldes gemäß $\sigma(x, y) = -\epsilon_0 \partial_z \Phi|_{z=0}$ gegeben ist.

(d) Fertigen Sie jeweils eine Zeichnung der Feldlinien und der Oberflächenladungsverteilung an. Welche Symmetrie gibt es?

(e) Wie groß ist die totale Influenzladung $Q_{\text{inf}} = \int dxdy\, \sigma(x, y)$?

(f) Welche Kraft wird auf die Ladung ausgeübt? Was passiert für eine nicht geerdete Platte?

A 3.2 Feld eines Kreisrings

Ein homogen geladener, unendlich dünner Kreisring mit Radius R liegt in der xy-Ebene und hat seinen Mittelpunkt im Ursprung. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und das Potenzial Φ entlang der z-Achse. Diskutieren Sie weiterhin den Grenzfall $|z| \gg R$.

A 3.3 Trennung der Variablen in kartesischen Koordinaten

Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(x, y) = 0$ mit den Randbedingungen $\Phi(x, 0) = V(x)$ für $0 < x < a$ und $\Phi(0, y) = \Phi(a, y) = \lim_{y\to\infty} \Phi(x, y) = 0$ (siehe Abbildung 1). Beachten Sie, dass aufgrund der zweidimensionalen Aufgabenstellung das skalare Potential Φ als z-unabhängig angenommen wird, also $\Phi(x, y, z) \equiv \Phi(x, y)$ gilt.

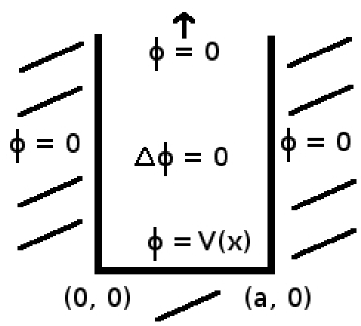

Abbildung 1: Skizze Trennung der Variablen in kartesischen Koordinaten

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 29.10.2019)

Die Hausaufgaben sind weitere Beispiele des Stoffes der Anwesenheitsaufgaben und beinhalten eine Aufgabe zur Kapazität und Kondensatoren.

H 3.1 Spiegelladung II

Eine Punktladung q soll am Ort $\vec{r}_q$ außerhalb einer geerdeten, leitenden Hohlkugel mit Radius R und Mittelpunkt am Koordinatenursprung (siehe Abbildung 2 (links)) sitzen.

(a) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ außerhalb der Hohlkugel. Platzieren Sie hierzu eine Spiegelladung an geeigneter Stelle innerhalb der Hohlkugel und nutzen Sie die Randbedingung eines verschwindenen Potentials auf der Kugeloberfläche.
Tipp: Nutzen Sie die Rotationssymmetrie des Systems aus, um die Position der Spiegelladung zu finden.

(b) Berechnen Sie die Flächenladungsdichte σ auf der Kugeloberfläche. Zeigen Sie, dass die auf die Kugeloberfläche induzierte Ladung gleich der Spiegelladung ist. Skizzieren Sie auch die Feldlinien und σ.

(c) Welche Kraft $\vec{F}(\vec{r}_q)$ wirkt auf die Punktladung q?

(d) Betrachten Sie nun anstatt der geerdeten eine isolierte, leitende Hohlkugel mit Ladung Q, wobei wie zuvor die Punktladung q vor Ort sei. Wie würde nun das Potential $\Phi(\vec{r})$ aussehen und welche Kraft $\vec{F}(\vec{r}_q)$ wirkt auf die Punktladung? Machen Sie sich anschließend klar, warum ein Ladungsüberschuss auf einer Oberfläche diese trotz der gegenseitigen Abstoßung nicht verlässt.

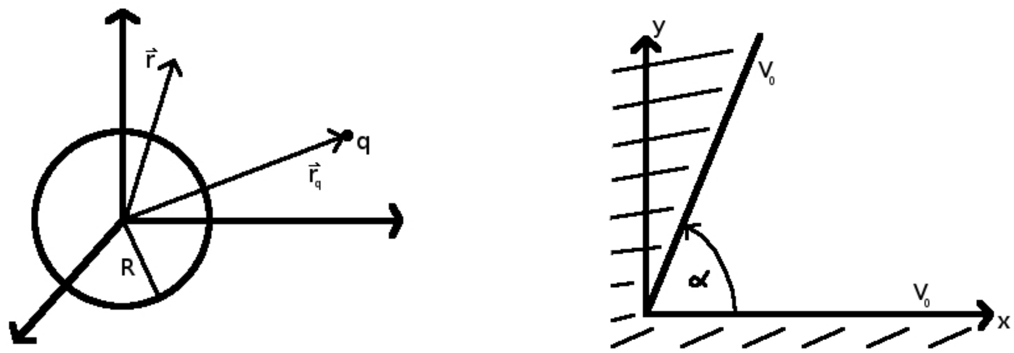

Abbildung 2: Links: Skizze Hohlkugel (zu Aufgabe H 3.1). Rechts: Skizze Trennung der Variablen in Polarkoordinaten (zu Aufgabe H 3.3)

H 3.2: Kapazität und Kondensatoren

Ein Volumen V wird von einer Fläche S begrenzt, die aus mehreren, auf den Potentialen Φ_i gehaltenen, separaten leitenden Teilflächen S_i besteht, von denen sich evtl. eine im Unendlichen befindet. Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Ladungsdichte ρ im Volumen V verschwindet. Die Kapazitäten C_{ij} sind über $Q_i = \sum_j C_{ij}\Phi_j$ definiert, wobei Q_i die gesamte auf der Fläche S_i befindliche Ladung bezeichnet.

(a) Zeigen Sie $C_{11} = \frac{1}{4\pi}\int_V |\nabla\Phi|^2 d^3r$, wobei Φ die Lösung der Poissongleichung in V zu den gegebenen Randwerten ist. Berechnen Sie so die Kapazität einer Kugel.
Tipp: Betrachten Sie den Fall einer Teilfläche mit $\Phi_1 = 1$ und benutzen Sie den Greenschen Satz:

$$\int_V (\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\Delta\Psi)\, \mathrm{d}^3r = \int_{\partial V} \Phi\partial_{\vec{n}}\Psi\, \mathrm{d}^2r\,, \tag{1}$$

wobei V ein abgeschlossenes Volumen mit der Oberfläche ∂V und $\partial_{\vec{n}} = \vec{n}\cdot\nabla$ die Richtungsableitung bzgl. der Oberflächennormale ist.

Im folgenden betrachten wir das ganze explizit für einen Kondensator, welcher aus aus zwei voneinander isolierten, idealen Leitern besteht. Wenn die Ladung Q von einem Leiter zum anderen gebracht wird, führt dies zu einer Potenzialdifferenz V zwischen ihnen.
Berechnen Sie die Kapazität $C = Q/V$ für die folgenden Anordnungen:

(b) Zwei parallel stehende, leitende Bleche der gleichen Fläche A mit Abstand d zueinander.
Zeigen Sie zusätzlich noch explizit, dass

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |\vec{E}|^2 \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i \Phi_j \tag{2}$$

für diese Anordnung erfüllt ist.

(c) Zwei konzentrische Hohlzylinder mit gleicher Länge L, welche groß im Vergleich zu ihren Radien a und b ist. Es sei $b > a$.
Tipp: Hier können Sie $Q = \epsilon_0 \int \vec{E}\, d\vec{F}$ und $V = \int \vec{E}\, d\vec{s}$, wobei das zweite Integral vom Ort der positiven zum Ort der negativen Ladung läuft, verwenden.

H 3.3 Trennung der Variablen in Polarkoordinaten

In einer zweidimensionalen Anordnung schneiden sich zwei leitende Platten mit Potential V_0 unter dem Winkel α (siehe Abbildung 2 (rechts)). Benutzen Sie im Folgenden die Polarkoordinaten (ρ, φ) mit der Plattenecke als Koordinatenursprung.

(a) Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten ist $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$. Bestimmen Sie durch eine Trennung der Variablen das Potential $\Phi(\rho, \varphi)$ zwischen den beiden Platten und zeigen Sie, dass es die Form

$$\Phi(\rho, \varphi) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}\, \sin\!\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) \tag{3}$$

hat.

(b) Bestimmen Sie das Potential (3) in der Näherung kleiner Abstände ρ mit $\rho \ll 1$. Berechnen Sie damit die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die Oberflächenladungsdichte σ auf den beiden Platten.

Viel Spaß!