Übung 4

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 05.11.2019)

In der Hausaufgabe werfen wir einen genaueren Blick auf die Legendre-Polynome und die δ-Distribution.

H 4.1 Legendre-Polynome

Setzt man für die Lösung der Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ in Kugelkoordinaten den sogenannten Separatations-ansatz an als

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)\,, \tag{1}$$

so lässt sich die partielle Differentialgleichung zweiter Ordung $\Delta\Phi = 0$ reduzieren auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für U, P und Q.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen Q, P und U folgende Gleichungen erfüllen

$$Q''(\varphi) = -m^2 Q(\varphi)\,, \qquad U''(r) = \tfrac{l(l+1)}{r^2} U(r)\,,$$
$$\tfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\tfrac{d}{dx}P(x)\right) + \left(l(l+1) - \tfrac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0\,, \tag{$\star$}$$

wobei $x = \cos(\theta)$ gesetzt wurde und die Konstanten $m, l \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung für P wird auch *verallgemeinerte Legendregleichung* genannt.

(b) Warum gilt $m \in \mathbb{Z}$? Wieso beschreibt $m = 0$ ein zylindersymmetrisches Problem, d.h. ein Problem mit Azimutalsymmetrie? Schreiben Sie $(\star)$ dafür als *Legendregleichung*

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\right) + l(l+1)P_l(x) = 0\,. \tag{2}$$

Da diese Gleichung zweiter Ordnung ist, gibt es für jedes l zwei linear unabhängige, i. Allg. für $x \to \pm 1$ divergente Lösungen $P_l(x)$ und $\tilde{P}_l(x)$. $P_l(\pm 1)$ bleibt allerdings für $l \in \mathbb{N}$ endlich, da P_l dann einfache Polynome vom Grad l sind. Diese durch $P_l(1) = 1$ normierte polynomiale Lösung heißt *l-tes Legendre-Polynome $P_l(x)$*.

(c) Benutzen Sie die Formel von Rodrigues (Olinde Rodrigues, 1794-1851)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\,, \tag{3}$$

um die Orthogonalität der Polynome in $L^2([-1,1])$[1] zu zeigen:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\,. \tag{4}$$

Tipp: Benutzen Sie zuerst die Legendregleichung, um die Orthogonalität zu zeigen, und anschließend die Formel von Rodrigues, um die Normalisierung auszurechnen. Außerdem gilt: $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\,l!}{\Gamma(l+3/2)}$, wobei $\Gamma(l+1) = l\Gamma(l)$ mit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ die Gammafunktion ist.

(d) Geben Sie $P_l(x)$ für $l \le 2$ explizit an. Wie wirkt allgemein die Parität, d.h. was ist $P_l(-x)$?

(e) Folgern Sie aus der Formel von Rodrigues die Identität

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)\,, \tag{5}$$

wobei $P'_l(x) = \frac{d}{dx}P_l(x)$ die Ableitung des l-ten Legendre-Polynoms ist.

Damit haben wir festgestellt, dass die Legendre-Polynome $P_l(x)$ sogar ein vollständiges, orthonormales System (Hilbertbasis) in $L^2([-1,1])$ bilden.

[1] Für ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ bezeichnet der Hilbert-Raum $L^2([a,b])$ den Raum der quadratintegrablen Fuktionen $L^2([a,b]) = \left\{f : [a,b] \to \mathbb{C};\quad \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty\right\}$.

H 4.2 Darstellungen der δ-Distribution

Formal ist die Deltadistribution δ_a als Abbildung von einem Funktionenraum $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{C}$ definiert mit $\delta_a[f] = f(a)$ für beliebige Testfunktionen f. Wir erinnern uns an die Definition der Deltadistribution

$$\delta_a[f] = f(a) =: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,. \tag{6}$$

Bedenken Sie, dass $\delta\,(x-a)$ nur in Integralen definiert ist und dementsprechend alle Eigenschaften immer in Integralen zu zeigen sind. Dennoch ist es üblich, Aussagen direkt mittels $\delta\,(x-a)$ ohne Integral zu formulieren. Zusätzlich definieren wir durch

$$\Theta\,(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

die Heaviside-Funktion, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet.
In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass sich die Deltadistribution zum einen als Ableitung der Heaviside-Funktion und zum anderen als Limes stetiger Funktionenfolgen darstellen lässt.

(a) Zeigen Sie, dass $\delta(x-a) = \frac{d}{dx}\Theta(x-a)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2} = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2+x^2}\,. \tag{8}$$

Spalten Sie hierzu das Integral (6) in drei Integrale $[-\infty,-\epsilon]$, $[-\epsilon,\epsilon]$ und $[\epsilon,\infty]$ auf.

(c) Zeigen Sie ebenso, dass gilt

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{n\to\infty} ne^{-\pi x^2 n^2}\,, \quad \delta(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\frac{\sin(nx)}{nx}, \\ \delta(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx}dk. \end{aligned} \tag{9}$$

Tipp: Verwenden Sie das Riemann-Lebesque Lemma

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\int_a^b f(x)\ e^{i\eta x}\ \mathrm{d}x = 0,$$

wobei $f(x)$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Intervall $a \leq x \leq b$ ist.

Viel Spaß!