Übung 6

Anwesenheitsaufgaben (14./15.11.2019)

A 6.1 Definition und Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

Die *verallgemeinerte Legendre Differentialgleichung* ist gegeben durch

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m\left(x\right)=0\,. \tag{1}$$

Die Lösungen dieser Gleichung

$$P_l^m\left(x\right)=\left(-1\right)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\left(x\right) \tag{2}$$

heißen *zugeordnete Legendrefunktionen.*

(a) Wir definieren uns eine Hilfsfunktion $P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}H_l^m(x)$. Zeigen Sie, dass die Hilfsfunktion die verallgemeinerte Legendregleichung erfüllt, wenn die Funktion $H_l^m(x)$ folgende Differentialgleichung löst:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2H_m^l(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x(m+1)\frac{\mathrm{d}H_m^l(x)}{\mathrm{d}x}+(l(l+1)-m(m+1))H_m^l(x)=0\,. \tag{3}$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen der verallgemeinerten Legendregleichung sind i. Allg. für $x\to\pm1$ divergent, und nur für $l\in\mathbb{N}$ und $|m|\leq l(m\in\mathbb{Z})$ bleibt eine davon endlich. Diese Lösung heißt *assoziierte Legendrefunktion* $P_l^m(x)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die verallgemeinerte Legendregleichung gelöst wird durch

$$P_l^m(x)=\frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l\,. \tag{4}$$

Tipp: Differenzieren Sie die Differentialgleichung m mal und nutzen Sie die Formel von Rodrigues.

(c) Wie verändert $m\to-m$ die verallgemeinerte Legendregleichung? Zeigen Sie, dass Lösungen für negative m sich nach der Formel

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \tag{5}$$

ergeben.

(d) Zeigen Sie die Orthogonalität der assoziierten Legendrefunktionen bzgl. l:

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}. \tag{6}$$

Tipp: Sie dürfen die Orthogonalität der Legendre-Polynome $P_l(x)$ verwenden.

Ein vollständiges System von Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf der Einheitssphäre ist durch die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{7}$$

gegeben, wobei $l\in\mathbb{N}$ und $m\in\{n\in\mathbb{Z}\big||n|\leq l\}$.
Um diese zu bestimmen, überführen wir über einen Separationsansatz $\Phi(r,\theta,\varphi)=\frac{R_l(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi)$ die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten $\Delta\Phi=0$, mit $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$, in eine gewöhnliche Differentialgleichung in r und ein Eigenwertproblem des Laplaceoperators auf der Einheitssphäre S^2 $\Delta_{\theta,\varphi}Y_{lm}=-l\left(l+1\right)Y_{lm}$.

(e) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von $\Delta\Phi=0$ in Kugelkoordinaten lautet

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-l-1})Y_{lm}(\theta,\varphi)\,. \tag{8}$$

(f) Zeigen Sie für die Konjugation $Y^*_{lm} = (-1)^m Y_{l,-m}$. Geben Sie zusätzlich Y_{lm} für $l \leq 2$ explizit an.

(g) Zeigen Sie das Verhalten unter der Parität

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \text{d.h.} \quad Y_{lm}(-\vec{e}_r) = (-1)^l Y_{lm}(\vec{e}_r)\,. \tag{9}$$

(h) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ein (vollständiges) Orthonormalsystem von $L^2(S^2)$ bilden

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, Y^*_{\ell' m'}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \tag{10}$$

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 18.11.2019)

H 6.1 Dielektrische Kugel

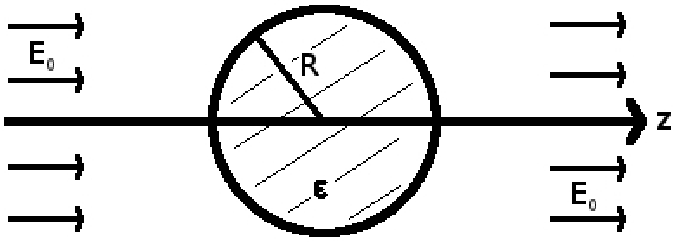

Abbildung 1: Skizze Dielektrische Kugel

Eine Kugel mit Radius R und Dielektrizitätszahl ϵ/ϵ_0 wird in ein konstantes elektrisches Feld platziert (siehe Abbildung 1). Weit weg von der Kugel zeigt das Feld in z-Richtung mit der Stärke E_0. Weder außer- noch innerhalb der Kugel gibt es freie Ladungen.

(a) Bestimmen Sie das elektrische Potential Φ inner- und außerhalb der Kugel.

(b) Wie lautet das elektrische Feld $\vec{E}$? Was ist die durch die elektrische Polarisation verursachte Oberflächenladungsdiche auf der Kugel?
Tipp: Sie können sich vorstellen, dass das äußere elektrische Feld sich zusammensetzt aus dem konstanten äußeren Feld und dem Feld eines am Koordinatenursprung sitzenden Dipols. Nutzen Sie das Dipolmonent, um die Polarisation und damit die Oberflächenladungsdichte zu bestimmen.

(c) Nun soll das Problem umgedreht werden: Eine leere Kugel wird von Material mit der Dielektrizitätszahl ϵ/ϵ_0 umgeben. Wieder wird ein äußeres elektrisches Feld $\vec{E} = E_0\,\hat{e}_z$ angelegt. Wie sieht dann das elektrische Feld außer- und innerhalb der Kugel aus?

H 6.2 Ladungsanordnungen ohne Axialsymmetrie

(a) Beweisen Sie unter Verwendung von H 5.1 die Formel

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha), \tag{11}$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$, $r_< = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}\,'|)$, $r_> = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}\,'|)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des *Additionstheorems*

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)\,, \tag{12}$$

(Für α gilt $\cos(\alpha) = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(\phi - \phi')$), dass das durch eine beliebige Ladungsverteilung ρ am Ort $\vec{x}$ erzeugte Potential gegeben ist durch:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\int_0^{\infty} r'^2 dr' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \int\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\phi')\rho(\vec{x'}). \tag{13}$$

(c) Folgern Sie daraus, dass für das Fernfeld einer Ladungsverteilung (d.h. wenn $r > r'$ bleibt) sich das Potential als

$$\Phi(\vec{x})|_{\text{außen}} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} \tag{14}$$

schreiben lässt, wobei die $Q_{lm} = \int_0^r r'^2 dr' r'^l \int\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\phi')\rho(\vec{r'})$ als Multipolmomente bezeichnet werden.

(d) Geben Sie die Momente explizit für $l = 0$ und $l = 1$ an. Drücken Sie die Ergebnisse durch die Gesamtladung Q sowie die in H 5.2 eingeführten Dipol- und Quadrupolmomente aus.
Tipp: Die Multipolmomente erben die Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen daher gilt: $Q_{lm}^* = (-1)^m Q_{l\,-m}$.

H 6.3 Stromdurchflossener Kreisring

Betrachten Sie im Folgenden einen vom Strom I durchflossenen Kreisleiter vom Radius R in der x-y-Ebene.

1. Wie lautet $\vec{j}$ in diesem Fall? Berechnen Sie das magnetische Moment des Kreisleiters. Verallgemeinern Sie das Ergebnis auf beliebige ebene Leiterschleifen. Wie sieht das Ergebnis aus, wenn der Strom nur aus einem Teilchen besteht?

2. Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetz das Magnetfeld auf der Symmetrieachse des Kreisleiters und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Dipolfeld.

3. Vergleichen Sie die Felder eines elektrischen und magnetischen Dipols. Skizzieren Sie die Feldlinien des Kreisleiters und einer Punktladungskonfiguration $\pm Q$ an $(0, 0, \pm a)$.

Viel Spaß!