Übung 7

Anwesenheitsaufgaben (21./22.11.2019)

A 7.1 Lorentzkraft

Ein positiv geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung q ruht im Koordinatenursprung. Nun sollen die magnetische Flussdichte $\vec{B} = B\,\hat{e}_x$ und die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E\,\hat{e}_z$ angelegt werden.

(a) Wie sieht die Teilchenbahn qualitativ aus? Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und vereinfachen Sie sie mit der Zyklotronfrequenz $\omega = |q||\vec{B}|/m$. Was beschreibt diese?

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

A 7.2 Magnetisches Dipolmoment

Betrachten Sie ein magnetisches Dipolmoment $\vec{m}$, welches im Koordinatenursprung liegt und in z-Richtung zeigt. Benutzen Sie das in der Vorlesung angegebene Vektorpotential

$$\vec{A}_{Dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m} \times \vec{r}\,, \tag{1}$$

um für die magnetische Flussdichte den folgenden Ausdruck in Kugelkoordinaten herzuleiten:

$$\vec{B}_{Dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0|\vec{m}|}{4\pi r^3}\left(2\,\cos(\theta)\,\hat{e}_r + \sin(\theta)\,\hat{e}_\theta\right) \tag{2}$$

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 26.11.2019)

H 7.1 Rotierende Kugeln

Eine homogen geladene Hohlkugel mit Radius R und Oberflächenladungsdichte σ rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine Symmetrieachse, $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$. Der Koordinatenursprung soll im Kugelzentrum liegen.

(a) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ der Kugel, indem Sie die Kugel in dünne Scheiben senkrecht zur Rotationsachse zerlegen. Nutzen Sie hierzu Ihr Ergebnis für das magnetische Moment eines Kreisleiters aus H 6.3.

(b) Bestimmen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$. Entwickeln Sie hierzu das Vektorpotential in Kugelflächenfunktionen (analog zu Aufgabe H 6.2) und drücken Sie $\sin(\theta) \cdot \hat{e}_\varphi$ durch geeignete Kugelflächenfunktionen aus. Nutzen Sie anschließend die Orthogonalitätsrelation.
Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung für das Innere und Äußere der Hohlkugel.

(c) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ innerhalb der Kugel. Zeigen Sie außerdem, dass die magnetische Flussdichte außerhalb der Kugel die eines magnetischen Dipols ist. Geben Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ explizit an. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe (a).

Betrachten Sie nun eine homogen geladene Vollkugel im Vakuum mit Radius R und Gesamtladung Q. Die Kugel rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine Symmetrieachse, $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ und der Koordinatenursprung soll im Kugelzentrum liegen.

(d) Bestimmen Sie für diese Anordnung das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$. Benutzen Sie das Ergebnis von (b) und ersetzen Sie $R \to r', \sigma \to \rho \mathrm{d}r'$, wobei ρ die Ladungsdichte der Kugel ist. Integrieren Sie dann über r'. Begründen Sie diesen Ansatz. Machen Sie auch hier eine Fallunterscheidung für das Innere und Äußere der Kugel.
Tipp: Beachten Sie, dass man innerhalb der Kugel zwei Beiträge erhält.

(e) Bestimmen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ sowohl inner- als auch außerhalb der Kugel. Analog lässt sich auch hier die magnetische Flussdichte außerhalb der Kugel als magnetisches Dipolfeld schreiben. Geben Sie das magnetische Dipolmoment[1] $\vec{m}$ explizit an.

[1] Alternativ ließe sich das Dipolmoment analog zu Aufgabe (a) berechnen mit der Ersetzung $R \to r'$ und $\sigma \to \rho \mathrm{d}r'$.

H 7.2 Magnetfeld an Grenzflächen

Betrachten Sie eine Kugel vom Radius R mit der Permeabilität μ_m. Die Kugel sei im Inneren homogen magnetisiert

$$\vec{M} = M_0 \vec{e}_z \,. \tag{3}$$

Sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel verschwindet die Stromdichte $\vec{j} = 0$.

(a) Begründen Sie, warum für das Magnetfeld

$$\vec{H} = -\nabla \Phi_M \tag{4}$$

geschrieben werden kann, wobei Φ_M das magnetische Skalarpotential[2] ist. Berechnen Sie Φ_M im Außenraum der Kugel.

(b) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}$ sowohl außerhalb als auch innerhalb der Kugel.

(c) Nehmen Sie an, dass die Magnetisierung $\vec{M}$ der Kugel durch eine Oberflächenstromdichte $\vec{j}$ hervorgerufen wird. Zeigen Sie, dass die Oberflächenstromdichte von der Form

$$\vec{j} = \alpha(\theta)\delta(r-R)\vec{e}_\varphi \tag{5}$$

sein muss. Drücken Sie $\alpha(\theta)$ durch M_0 aus.

H 7.3 Kraft auf elementaren Dipol

Eine winzige, quadratische Leiterschleife mit Seitenlänge ϵ liegt in der yz-Ebene und wird vom Strom I durchflossen. Es wirkt das Magnetfeld $\vec{B}$. Zeigen Sie, dass sich für die auf die Leiterschleife wirkende Lorentzkraft $\vec{F} = \oint dl(\vec{I} \times \vec{B})$ der folgende Ausdruck ergibt

$$\vec{F} = (\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} \,, \tag{6}$$

hierbei ist $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment der ebenen Leiterschleife mit $|\vec{m}| = I\epsilon^2$.

Tipp: Benutzen Sie für die magnetische Flussdichte die Näherung

$$\vec{B}(0,\, y,\, z) \approx \vec{B}(0,\, 0,\, 0) + y \left.\frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\right|_{\vec{r}=\vec{0}} + z \left.\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right|_{\vec{r}=\vec{0}} \tag{7}$$

für $0 \leq y \leq \epsilon$ und $0 \leq z \leq \epsilon$.

Viel Spaß!

[2] Die Gleichung (4) bedeutet, dass man lokal ein Skalarpotential einführen kann. Weiter entspricht diese Gleichung der Beziehung $E = -\nabla\Phi$ aus der Elektrostatik.