Übung 8

Anwesenheitsaufgaben (28./29.11.2019)

A 8.1 Nabla-Kalkül

Zeigen Sie den folgenden Ausdruck

$$\vec{A}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) + \vec{B}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}))\,. \tag{1}$$

A 8.2 Magnetische Monopole

In dieser Aufgabe analysieren wir, wie sich die Theorie des Elektromagnetismus durch die Existenz von magnetischen Monopolen verändern würde, mit anderen Worten, falls eine magnetische Ladungsdichte $\rho_m(\vec{r}, t)$ existieren würde, wobei

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m\,. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie das Magnetfeld einer magnetischen Punktladung mit Ladung q_m im Koordinatenursprung mit Hilfe von Gleichung (2).

(b) Zeigen Sie, dass das Induktionsgesetz (homogene Maxwellgleichung für das elektrische Feld) mit zeitabhängigen magnetischen Ladungsdichten inkompatibel ist.

(c) Motivieren Sie eine Kontinuitätsgleichung der magnetischen Ladung,

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = 0\,, \tag{3}$$

wobei $\vec{j}_m$ die magnetische Stromdichte ist.
Tipp: Führen Sie eine Argumentation analog zur konventionellen Kontinuitätsgleichung durch.

(d) Modifizieren Sie das Induktionsgesetz unter Benutzung der magnetischen Stromdichte, sodass die Inkonsistenz aus Teilaufgabe (b) verschwindet.
Tipp: Schreiben Sie hierzu die Kontinuitätsgleichung in einen divergenzfreien Ausdruck um.

(e) Notieren Sie schließlich die Maxwell-Gleichungen (mit $\mu_r = \epsilon_r = 1$) für ein Universum, in dem magnetische Monopole und elektrische Monopole (und dementsprechend elektrische sowie magnetische Stromdichten) existieren.

(f) Verwenden Sie den Satz von Gauß, um den Fluss des Magnetfeldes durch eine geschlossene Oberfläche mit dem Vektorpotential $\vec{A}$ in Verbindung zu bringen. Was fällt Ihnen auf?
Tipp: Bis auf den Ursprung gilt $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und die Divergenz einer Rotation ist stets 0.

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 03.12.2019)

H 8.1 Hohlzylinder mit Draht

Ein unendlich langer, gerader Draht mit kreisförmigem Querschnitt (Radius a), Leitfähigkeit σ, Dielektrizitätskonstante ϵ und Permeabilität μ wird von einem homogenen Strom I durchflossen. Die Rückleitung des Stroms erfolgt durch einen koaxialen Hohlzylinder mit innerem Radius $b > a$ und äußerem Radius $R \to \infty$ (sowie ebenfalls Leitfähigkeit σ, Dielektrizitätskonstante ϵ und Permeabilität μ).

(a) Berechnen Sie die Felder $\vec{B}$ und $\vec{H}$ im Draht, im Zylinder und im Zwischenraum.

(b) Geben Sie das elektrische Feld im Draht und im Zylinder an. Berechnen Sie das elektrostatische Potential und das elektrische Feld im Zwischenraum.
Tipp: Sie können $\Phi(\vec{r}) = z f(\rho)$ als Ansatz verwenden, wenn der Draht in z-Richtung zeigt.

(c) Welche Oberflächenladung befindet sich auf dem Draht? Wie groß ist die Spannung zwischen Drahtoberfläche und (innerer) Zylinderoberfläche? Wie groß ist die Kapazität pro Längeneinheit des von Draht und Rückleiter gebildeten Zylinderkondensators?

(d) Bestimmen Sie den Energiefluss im Zwischenraum und im Inneren des Drahtes, insbesondere die Energie, die pro Längeneinheit durch die Oberfläche ins Drahtinnere fließt.
Tipp: Verwenden Sie den Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

H 8.2 Gegeninduktivität

Betrachten Sie zwei Leiterschleifen, in denen die Ströme I_a und I_b fließen. Bei einer langsamen Stromänderung $\dot{I}_a$ in einer Schleife ergibt sich die elektromotorische Kraft $\epsilon_b = -M_{ba}\, \dot{I}_a$ auf die andere Schleife. Zeigen Sie, dass für die Konstante M_{ba} der folgende Ausdruck gilt

$$M_{ba} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\vec{l}_a \cdot d\vec{l}_b}{|\vec{r}|}, \tag{4}$$

wobei $|\vec{r}|$ der Abstand zwischen den beiden Leiterstücken $d\vec{l}_a$ und $d\vec{l}_b$ ist.

H 8.3 Potentielle Energie des statischen Magnetfeldes

In der Vorlesung wurde die potentielle Energie des elektrischen Feldes zu

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{E}\, \vec{D}\, \mathrm{d}V \tag{5}$$

berechnet. Im Folgenden soll nun die potentielle Energie des Magnetfeldes berechnet werden. Hierzu wird davon ausgegangen, dass für eine kontinuierliche Ladungs- und Stromverteilung, die von einem elektrisches Feld erzeugte Leistung durch

$$P = \int \vec{E}\, \vec{j}\, \mathrm{d}V \tag{6}$$

gegeben ist. Verfahren Sie ausgehend von Gl. (6) wie folgt:

(a) Verwenden Sie die statischen Maxwell-Gleichungen, um $\vec{j}$ durch das Magnetfeld $\vec{B}$ auszudrücken.

(b) Verwenden Sie die Vektoridentität aus A 8.1 sowie das Faraday'sche Gesetz in differentieller Form.

(c) Vereinfachen Sie die auftretenden Integrale mit Hilfe (i) des Satzes von Gauß (ii) durch Verwendung von $\vec{B}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B^2)$.

(d) Unter welchen Voraussetzungen verschwindet das Oberflächenintegral?

(e) Verwenden Sie letztendlich $P\mathrm{d}t = \mathrm{d}U$.

Viel Spaß!