Übung 9

Anwesenheitsaufgaben (05./06.12.2019)

A 9.1 Nabla-Kalkül II

Zeigen Sie den folgenden Ausdruck

$$\vec{B}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{B}(\vec{r})^2) - (\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla})\, \vec{B}(\vec{r})\,. \tag{1}$$

A 9.2 Fourier-Reihen und Transformation

Physikalische Problemstellungen führen oft auf die Untersuchung von Rand- und Anfangswertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen. Da diese Differentialgleichungen meist linear sind, ist das Superpositionsprinzip anwendbar, sodass also die Lösung eines solchen Problems durch eine Linearkombination spezieller Lösungen (die bereits die Randbedingungen erfüllen) erzielt werden kann. Dies bedeutet dann aber, dass eine gegebene Funktion $f(x)$ in eine Reihe nach einem vorgegebenen Funktionensystem zu entwickeln ist. Jede periodische Funktion[1] $f(x)$ mit der Periode a kann dargestellt werden als unendliche Reihe der trigonometrischer Funktionen

$$\begin{aligned} u_0(x) &= d_0, \\ u_m(x) &= d_1 \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right), \\ v_m(x) &= d_2 \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

als

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \big(\alpha_m u_m(x) + \beta_m v_m(x)\big)\,, \qquad \alpha_m, \beta_m \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Man nennt diese Entwicklung *Fourierentwicklung.* Dies ist deswegen möglich, weil die obigen Funktionen einen vollständigen Satz an Funktionen bilden.

(a) Zuerst wollen wir die folgenden Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen anschauen. Berechnen Sie hierzu

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\, \mathrm{d}x = \int_{-a/2}^{a/2} \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{a}{2} & m = n \end{cases} \tag{4}$$

und

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\, \mathrm{d}x = 0\,. \tag{5}$$

Tipp: Nutzen Sie dabei folgendes Additionstheorem $\cos(mx + nx) = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx)$.

(b) Für den obigen Funktionensatz soll die Orthogonalitätsrelation $\int_{-a/2}^{a/2} U_m(x) U_n^*(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{m,n}$ gelten. Nutzen Sie diese Relation, um die Konstanten d_0, d_1 und d_2 zu bestimmen, sodass u_0, u_m und v_n nicht nur einen orthogonalen, sondern einen orthonormalen Funktionensatz bilden.

(c) Mit den entsprechenden orthonormalen Funktionen kann die Fourierreihe geschrieben werden als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\right) \tag{6}$$

mit $a_0, a_m, b_m \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelationen, um die Konstanten a_0, a_m und b_m zu bestimmen.

[1] Solange die Funktion integrable und beschränkt im Intervall ist, und nur endlich viele Unstetigkeiten und Maxima und Minima besitzt.

Jede eindeutige Funktion $f(t)$, die auf einem geschlossenen Intervall $[0, a]$ definiert ist, kann auf diesem Intervall durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden. Dies haben Sie sich bereits bei der Lösung von Potentialproblemen zu Nutze gemacht.

(d) Ist das Intervall unendlich groß, so ist es oft günstiger, den abzählbaren Satz orthogonaler Funktionen durch ein Kontinuum von Funktionen zu ersetzen. Ausgangspunkt dieser Bemühung ist es Sinus und Cosinus durch die komplexe Exponentialfunktion zu ersetzen. Verwenden sie die Eulersche Formel $e^{iy} = cos(y) + isin(y)$, um die Fourierreihe als

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\left(2\pi mx/a\right)}\,, \qquad c_m \in \mathbb{C} \tag{7}$$

darzustellen. Drücken Sie die neuen Koeffizienten c_0, c_{-m} und c_m durch die alten Koeffizienten a_0, a_m und b_m aus. Zeigen Sie weiter das c_m geschrieben werden kann als

$$c_m = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x) e^{-i\left(2\pi mx/a\right)}\, \mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

Tipp: Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelation $\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\ \exp\left(i2\pi\,(m-n)\,x/a\right) = \delta_{m,n}$.

(e) Wie sieht $f(x)$ aus, wenn man das Intervall unendlich groß werden ($a \to \infty$) lässt und gleichzeitig die Substitutionen

$$\begin{aligned} \frac{2\pi m}{a} &\to k \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} &\to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}m = \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \\ c_m &\to \frac{\sqrt{2\pi}}{a}\tilde{f}(k) \end{aligned} \tag{9}$$

vornimmt? Welche Form hat $\tilde{f}(k)$? Die Funktion $\tilde{f}(k)$ heißt Fourier-Transfomierte von $f(x)$. Sie lässt sich interpretieren als Dichtefunktion der in f enthaltenen harmonischen Schwingungen.

Wir haben jetzt gesehen, dass für quadratintegrable Funktion $f(x)$ die Fourier-Transformation durch

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} f(x), \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ e^{ikx}\tilde{f}(k) \tag{10}$$

definiert ist, wobei letztere die Rücktransformation darstellt.

(f) Leiten Sie die Orthogonalitätsbeziehung der Fouriertransformation her. Dieses Integral wird häufig als Darstellung der δ-Distribution benutzt.

(g) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $xf(x)$ und $f'(x)$.

(h) Wie lautet die Fouriertransformierte der δ-Distribution?

Hausaufgaben (Abgabe: Vorlesung am 10.12.2019)

H 9.1 Coulomb- und Lorenzeichung

(a) Begründen Sie, warum man die elektromagnetischen Potentiale Φ und $\vec{A}$ als $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ einführen kann. Leiten Sie die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale her.

(b) Zeigen Sie, wie man die Potentiale *umeichen* kann, ohne dass sich die Felder ändern.

(c) Zeigen Sie, dass in der *Coulomb-Eichung* $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ die Bestimmungsgleichung für Φ genau dem statischen Fall entspricht. Ist solch eine Eichung immer möglich? Lösen Sie die Gleichungen im Vakuum. Warum bezeichnet man diese Eichung als "transversal"?

(d) Zeigen Sie, daß die *Lorenz-Eichung* $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale entkoppelt. Ist solch eine Eichung immer möglich?

H 9.2 Maxwell-Gleichungen und ebene Wellen

In einem isotropen und homogenen Medium mit dielektrischer Leitfähigkeit ϵ, magnetischer Leitfähigkeit μ und elektrischer Leitfähigkeit σ gelten die Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

Hierbei ist ρ_f die gegebene freie Ladungsdichte (d.h. nicht durch eine Polarisierung erzeugt) und die freie Stromdichte $\vec{j}_f$ ist über $\vec{j}_f = \sigma \vec{E}$ gegeben.

(a) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Kontinuitätsgleichung und daraus eine Differenzialgleichung für die Ladungsdichte ρ_f her.

(b) Betrachten Sie ein ladungsfreies Medium mit $\rho_f = 0$. Leiten Sie eine Differenzialgleichung für die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ her.

(c) Zeigen Sie, dass die ebene Welle

$$\vec{H}(x,\, z,\, t) = A\, e^{i\alpha x + i\beta z}\, e^{-i\omega t}\, \hat{e}_y \tag{12}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung aus der vorherigen Teilaufgabe ist. A ist eine Konstante und die Koeffizienten α und β sind komplex mit $\alpha^2 + \beta^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega$.

(d) Berechnen Sie die zu Gleichung (12) gehörige elektrische Feldstärke $\vec{E}(x,\, z,\, t) = \vec{E}_0(x,\, z)e^{-i\omega t}$.

Betrachten Sie eine ebene Welle mit $\vec{E}\,(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t\right)\right]\right]$, $\vec{B}\,(\vec{x},t) = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}\,(\vec{x},t)$, $\vec{k} \perp \vec{E}$ und $\omega = c\|\vec{k}\|$. Beachten Sie, dass $\vec{E}$ ein komplexer Vektor ist.

(e) Zerlegen Sie für $\vec{k} = (0, 0, k)$ und $\vec{E} = (E_1, E_2, 0)$ die ebene Welle in eine Summe von linear polarisierten Wellen. Zerlegen Sie die ebene Welle ebenso in eine Summe von links- und rechtszirkular polarisierter Welle.

(f) Berechnen Sie die Intensität des Strahles, diese ist durch $I = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \|\vec{S}(t)\|$ gegeben, wobei $\vec{S}(t)$ der Poynting-Vektor ist und $T = 2\pi/\omega$. Zeigen Sie, dass die Intensität der ursprünglichen Welle gerade die Summe der Intensitäten der links- und rechtszirkular polarisierten Komponente ist.

H 9.3 Zirkular polarisierte Welle

Eine in x-Richtung laufende, zirkular polarisierte Welle soll durch das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r},\, t) = \mathrm{Re}(f(x - ct)\,(\hat{e}_y + i\hat{e}_z)) \tag{13}$$

beschrieben werden, wobei f eine beliebige komplexwertige Funktion und $\hat{e}_{y/z}$ die Einheitsvektoren in y- bzw. z-Richtung sind. Re steht für die Auswertung des Realteils.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r},\, t)$.

(b) Berechnen Sie die Feldenergiedichte $U_{\mathrm{EB}}(\vec{r},\, t)$, die Feldenergiestromdichte (Poynting-Vektor) $\vec{S}(\vec{r},\, t)$ und den Spannungstensor $T_{ij}(\vec{r},\, t)$.

Viel Spaß!