

---

# Transport durch Quantenpunkte

Seminarvortrag von Kilian Rosbach

im Rahmen des Seminars  
“Nanoskopische Physik”

von Prof. M. Giersig und Prof H. Kroha

Freitag, 29. Juli 2005

---

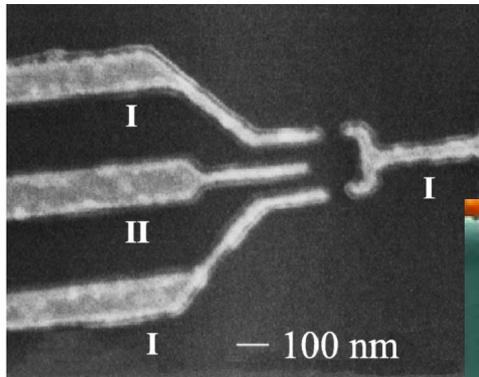
# Übersicht

- Quantenpunkte, Erläuterung und Beispiele
- Landauer Formel
- Herleitung verbesserte “Landauer-ähnliche” Formel
- Keldysh-Formalismus
- Anderson-Modell
- Coulomb-Blockade
- Leitwert-Quantisierung

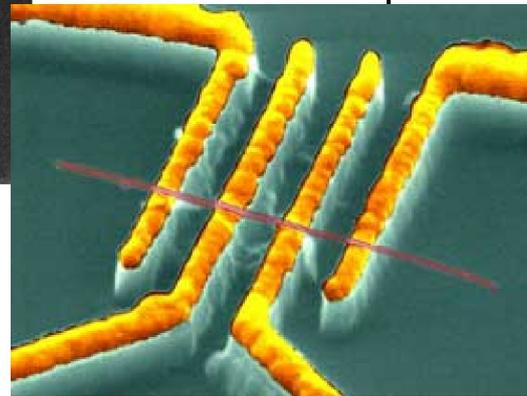
# Quantenpunkt

- Mesoskopisches System, d.h.  
Größe des Systems vergleichbar mit anderen wichtigen Größen  
(zum Beispiel mittlere freie Weglänge)
- Wellennatur wichtig, Quantenmech. Behandlung erforderlich
- “Null-Dimensionales” System, daher Bezeichnung als “Punkt”
- Experimentell realisiert als kleiner Bereich von Fermionen
  - z.B. in einem Single Electron Transistor (SET) (etwa  $50 e^-$ )
  - oder in einem sog. künstlichen Atom

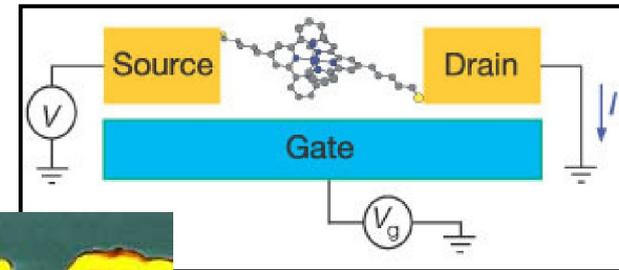
# Abbildungen Quantenpunkte



Goldhaber-Gordon et al.,  
Nature, 391, 156 (1998)



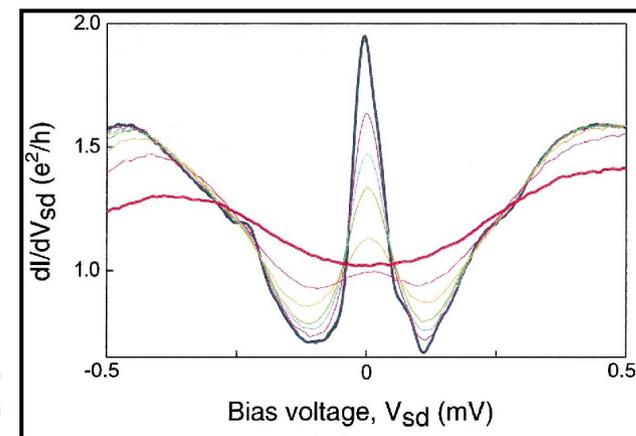
Nygård et al.,  
Nature 408, 342 (2000)



Park, McEuen, Ralph et al.,  
Nature, 417, 722 (2002)

Semiconductor Qdots  
Carbon nanotubes  
Molecular Qdots

Van der Wiel, Tarucha, Kouwenhoven et al.,  
(2000)



## Was bisher geschah...

- Theoretisches Werkzeug bekannt, lange bevor experimentelle Realisierung möglich war
- Erste konkrete Anwendungen auf mesoskopische Systeme bereits Anfang der 1970er von französischen Wissenschaftlern (Caroli, Combescot, Nozieres, Saint-James)
- Viele dieser Ergebnisse Mitte 1990er wieder aufgegriffen, Mesoskopik wird eigenständiges Feld
- Grundlegend: **Landauer Formel** (R. Landauer, 1957)

# Landauer Formel

- Beschreibt System aus zwei Leitern und einem zentralen Bereich
- Viele gute Ergebnisse, verschiedenste Anwendungsgebiete
- Ermöglicht Aussagen anhand lokaler Eigenschaften, als Beispiel

$$g = \frac{2e^2}{h} |t|^2$$

Leitwert beschrieben durch  
Transmissions-Amplitude des  
zentralen (Quanten-)Bereichs

## Einschränkungen der Landauer Formel:

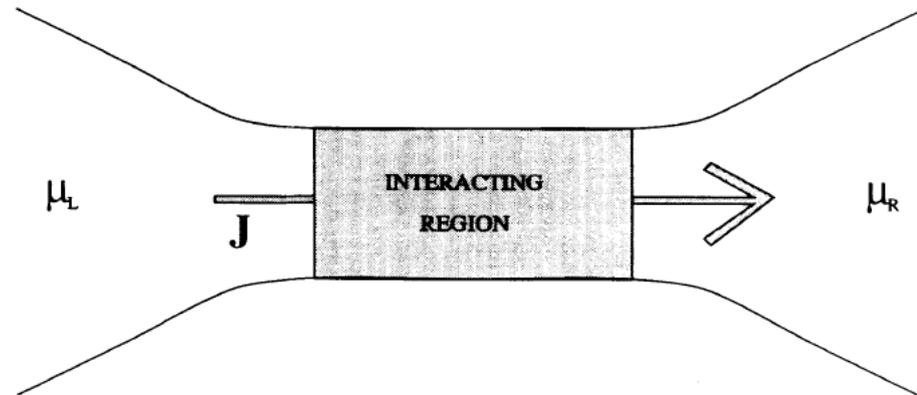
- Nur **ein** Niveau im Quantensystem
- Niedrige angelegte Spannung
- Keine inneren Wechselwirkungen  
(z.B. Coulomb-WW, Spin-Spin-WW)

## “Landauer-ähnliche” Formel (Meir, Wingreen)

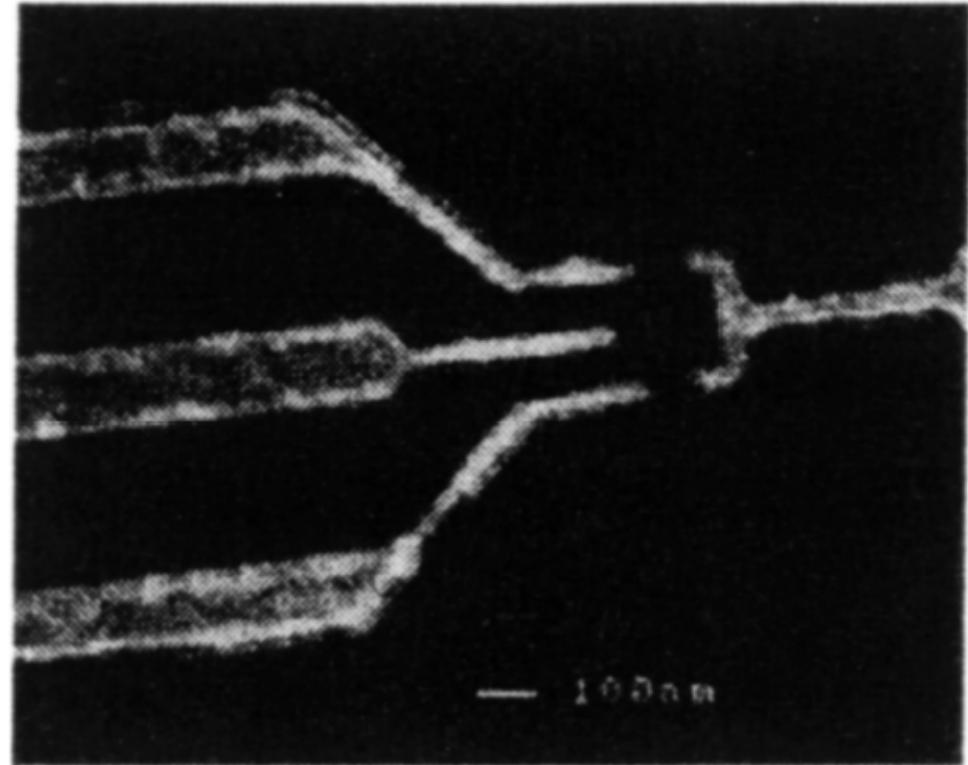
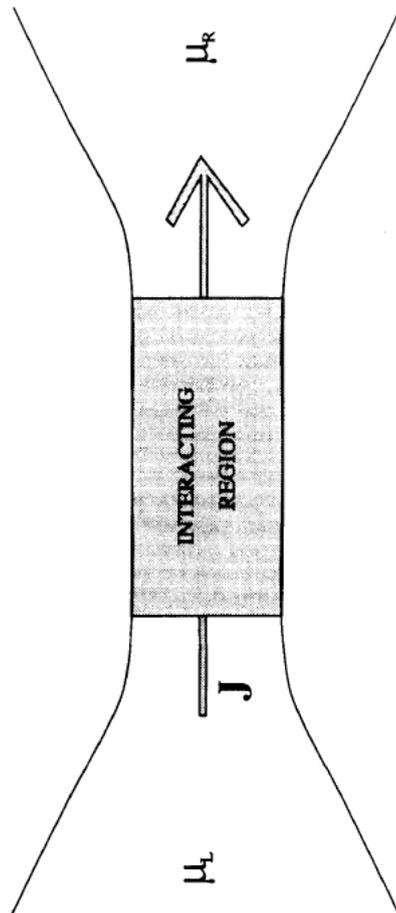
- Einschränkungen störend – i.b. fehlende Wechselwirkungen
- Sehr allgemeine Lösung 1992 von Y. Meir und N. Wingreen

- Ausgangspunkt ist folgendes Modell:

- Zwei Leiter, in denen sich Elektronen frei bewegen
- Mittlerer Bereich mit WW
- Unterschiedl. chem. Pot.  
 $\mu_L > \mu_R$  verursachen Strom  $J$
- Strom jedoch gering,  
Niveaus der Leiter bleiben ungestört



# Vergleich Modell vs. Realisierung



**Single Electron Transistor (SET):**  
Unterhalb der aufgedampften Elektroden  
ist das Elektronengas verarmt – Leitung  
nur in den schwarzen Bereichen.

Etwa 50 Elektronen, Durchmesser 150nm

## Ansatz in 2. Quantisierung

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Leiter}} + \mathcal{H}_{\text{Quantenpunkt}} + \mathcal{H}_{\text{Übergang}}$$

$$\mathcal{H}_{\text{Leiter}} = \sum_{k,\alpha} \epsilon_{k\alpha} \hat{c}_{k\alpha}^\dagger \hat{c}_{k\alpha}$$

$$\mathcal{H}_{\text{Quantenpunkt}} = \mathcal{H}_d \left( \left\{ \hat{d}_n^\dagger \right\}, \left\{ \hat{d}_n \right\} \right)$$

$$\mathcal{H}_{\text{Übergang}} = \sum_{k,\alpha,n} \left( V_{k\alpha,n} \hat{c}_{k\alpha}^\dagger \hat{d}_n + V_{k\alpha,n}^* \hat{d}_n^\dagger \hat{c}_{k\alpha} \right)$$

$\hat{c}_{k\alpha}^\dagger, \hat{c}_{k\alpha}$	Erzeuger und Vernichter im Leiter $\alpha$
$\alpha$	Kanal-Index (L oder R), weitere Quantenzahlen (z.B. Spin)
$\hat{d}_n^\dagger, \hat{d}_n$	Erzeuger und Vernichter im Quantenpunkt
$\epsilon_{k\alpha}$	Energieniveaus im Leiter
$V_{k\alpha,n}$	Übergangs-Amplitude Quantenpunkt $\rightarrow$ Leiter

## Erläuterung

- 1. Term beschreibt innere Energie der beiden Leiter
  - Für jeden Zustand Energie mit Besetzungszahl multiplizieren
- 2. Term beschreibt allgemein Energie des Quantenpunkts
  - Durch geeignete Wahl entstehen verschiedene Modelle
- 3. Term beschreibt “Hopping”: Zustand im Quantenpunkt wird vernichtet und einer im Leiter erzeugt und umgekehrt

Aus diesem Hamilton-Operator können nun verschiedene weitere Operatoren (und Erwartungswerte) bestimmt werden. Die wichtigste Größe ist der Strom. Wir berechnen zunächst den Strom vom linken Leiter in den Quantenpunkt.

## Strom $J_L$ (von $L \rightarrow QP$ )

• Definition:  $J_L = \langle \hat{J}_L \rangle = e \left\langle \frac{d\hat{N}_L}{dt} \right\rangle$

$$\hat{N}_L = \sum_{\substack{k \\ \alpha \in L}} \hat{c}_{k\alpha}^\dagger \hat{c}_{k\alpha}$$

• Wähle Heisenberg-Bild, nur Operatoren zeitabhängig

• Heisenberg-Bewegungsgleichung:  $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O} = [\hat{O}, \mathcal{H}]_-$

• Antikommutator-Relationen:

$$\begin{aligned} [\hat{c}_{k\alpha}, \hat{c}_{k'\alpha'}^\dagger]_+ &= \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} & [\hat{c}, \hat{c}]_+ &= [\hat{c}^\dagger, \hat{c}^\dagger]_+ = 0 \\ [\hat{c}, \hat{d}]_+ &= [\hat{c}^\dagger, \hat{d}^\dagger]_+ = [\hat{c}, \hat{d}^\dagger]_+ = 0 \end{aligned}$$

## Strom $J_L$ (Ergebnis)

$$J_L = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\substack{k,n \\ \alpha \in L}} \left( V_{k\alpha,n} \langle \hat{c}_{k\alpha}^\dagger \hat{d}_n \rangle - V_{k\alpha,n}^* \langle \hat{d}_n^\dagger \hat{c}_{k\alpha} \rangle \right)$$

- Strom soll nun wie in der ursprünglichen Landauer Formel ausgedrückt werden durch **Fermi-Verteilungen** der beiden Leiter und **lokale Eigenschaften** des Quantenpunktes.
- Offensichtlich liegt **Nicht-Gleichgewicht** vor, wenn Strom fließt
- Definitionen aus dem **Keldysh-Formalismus** hilfreich

EXKURS: GREENS-FUNKTIONEN FÜR  
GLEICHGEWICHT UND NICHT-  
GLEICHGEWICHT

## Wiederholung: 2-Zeiten-Greensfkt., Gleichgewicht

- Bekannt aus Quantenmechanik II:

$$G^R(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = -i \theta(t_1 - t_2) \left\langle 0 \left| \left[ \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t_1), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \right]_+ \right| 0 \right\rangle$$

$$G^A(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = +i \theta(t_2 - t_1) \left\langle 0 \left| \left[ \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t_1), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \right]_+ \right| 0 \right\rangle$$

$$G(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = -i \left\langle 0 \left| \hat{T} \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t_1) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \right| 0 \right\rangle$$

- Retardierte, avancierte und kausale Greensfunktion
- Zeitordnungsop. T ordnet chronologisch **von rechts nach links**
  - Dabei evtl. Vorzeichen-Änderung!
- Stufenfunktion  $\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

## Jetzt: Keldysh-Formalismus, Nicht-Gleichgewicht

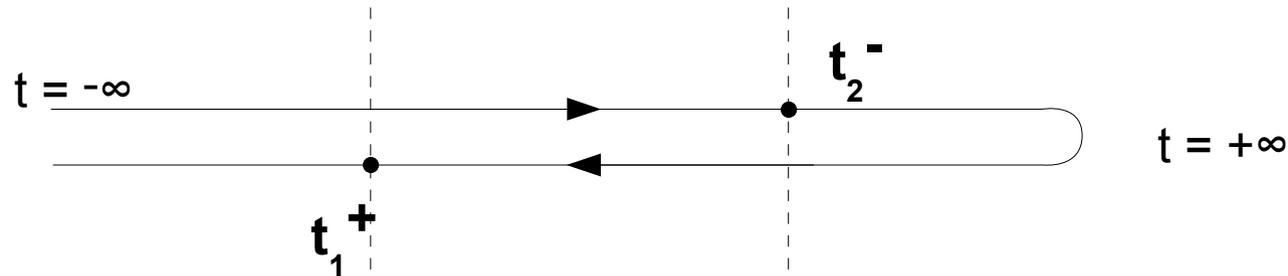
- Bei  $t = -\infty$  keine Verbindung zwischen Systemen, Gleichgewicht
- Verbindung (Störung) wird bei  $t = 0$  “adiabatisch” eingeschaltet
- Problem: Neuer Gleichgewichts-Zustand bei  $t = +\infty$  unbekannt
- Idee: Zustand in der Zeit zurückentwickeln
- Zeitachse  $\rightarrow$  Keldysh - Kontur



Keldysh - Kontur

## Keldysh-Formalismus (Seite 2/5)

- Zusätzliche Angabe erforderlich, um Zeitpunkt festzulegen
  - Index - für obere Zeitachse, + für untere



- Beispiel:  $t_1^+$  zeitlich vor  $t_2^-$ , auf der Kontur  $t_1^+$  nach  $t_2^-$
- Zeitordnung  $T$  wird durch Konturordnung  $T_C$  ersetzt
- 4 Kombinationen -- -+ +- ++ werden unterschieden

## Keldysh-Formalismus (Seite 3/5)

- Betrachte kausale Greensfunktion. Benutze zur Abkürzung:

$$G_{12} \equiv G(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) \text{ und } \hat{\Psi}_1 \equiv \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t_1), \hat{\Psi}_2 \equiv \hat{\Psi}(\vec{r}_2, t_2)$$

- Matrixschreibweise:

$$G_{12} \rightarrow \underline{\underline{G_{12}}}$$

$$\underline{\underline{G_{12}}} = \begin{pmatrix} G_{12}^{--} & G_{12}^{-+} \\ G_{12}^{+-} & G_{12}^{++} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} G(\vec{r}_1, t_1^-; \vec{r}_2, t_2^-) & G(\vec{r}_1, t_1^-; \vec{r}_2, t_2^+) \\ G(\vec{r}_1, t_1^+; \vec{r}_2, t_2^-) & G(\vec{r}_1, t_1^+; \vec{r}_2, t_2^+) \end{pmatrix}$$

- Alle 4 Greensfkt. so wie vorher definiert, ausser:
  - Zeitordnung geht in Konturordnung über
  - Erwartungswert bzgl. beliebiger Zustände

## Keldysh-Formalismus (Seite 4/5)

• Konkret:

$$G_{12} = -i \langle 0 | \hat{T} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^\dagger | 0 \rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$G_{12}^{--} = -i \langle n | \hat{T}_c \hat{\Psi}_1^- \hat{\Psi}_2^{-\dagger} | n \rangle = -i \langle n | \hat{T} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^\dagger | n \rangle \equiv G_{12}^T$$

$$G_{12}^{-+} = -i \langle n | \hat{T}_c \hat{\Psi}_1^- \hat{\Psi}_2^{+\dagger} | n \rangle = +i \langle n | \hat{\Psi}_2^\dagger \hat{\Psi}_1 | n \rangle \equiv G_{12}^<$$

$$G_{12}^{+-} = -i \langle n | \hat{T}_c \hat{\Psi}_1^+ \hat{\Psi}_2^{-\dagger} | n \rangle = -i \langle n | \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^\dagger | n \rangle \equiv G_{12}^>$$

$$G_{12}^{++} = -i \langle n | \hat{T}_c \hat{\Psi}_1^+ \hat{\Psi}_2^{+\dagger} | n \rangle = -i \langle n | \tilde{\hat{T}} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^\dagger | n \rangle \equiv G_{12}^{\tilde{T}}$$

- Man kann sich dies leicht mit einer kleinen Skizze klarmachen.
- Vergleich (mit den ursprünglichen Definitionen) ergibt:

$$G^> + G^< = G^T + G^{\tilde{T}}$$

$$G^> - G^< = G^R - G^A$$

Die 4 Matrix-Elemente sind voneinander abhängig.  
Man muss nicht alle kennen.

# Keldysh-Formalismus (Abschluss, Zusammenfassung)

- Im Folgenden: Frequenz- bzw. Energiedarstellung (Fouriertrafo)
- Greensfunktionen für die Leiter:  $G_{k\alpha, k'\alpha'}(\omega)$
- Greensfunktionen für den Quantenpunkt:  $G_{m,n}(\omega)$
- Übergangs-Greensfunktionen:  $G_{k\alpha, n}(\omega)$
- Man zeigt folgende Dyson-Gleichungen:

Zusätzlich zu  
Indices noch  
Matrix-Charakter!

$$G_{k\alpha, n}^<(\omega) = \sum_m V_{k\alpha, m} \left[ G_{k\alpha, k\alpha}^{(0)T}(\omega) G_{m,n}^<(\omega) - G_{k\alpha, k\alpha}^{(0)<}(\omega) G_{m,n}^{\tilde{T}}(\omega) \right]$$

$$G_{n, k\alpha}^<(\omega) = \sum_m V_{k\alpha, m}^* \left[ G_{k\alpha, k\alpha}^{(0)<}(\omega) G_{n,m}^T(\omega) - G_{k\alpha, k\alpha}^{(0)\tilde{T}}(\omega) G_{n,m}^<(\omega) \right]$$

- Zur Erinnerung:

$$G_{n, k\alpha}^< \equiv i \langle n | \hat{c}_{k\alpha}^\dagger \hat{d}_n | n \rangle$$

$$G_{k\alpha, n}^< \equiv i \langle n | \hat{d}_n^\dagger \hat{c}_{k\alpha} | n \rangle$$

## Strom (Fortsetzung)

- Nun haben wir fast alle Zutaten zusammen!
- Konkrete Form der freien Greensfunktionen fehlt noch
  - Aus Spektraldarstellung:

$$G_{k\alpha, k\alpha}^{(0) <}(\omega) = 2\pi i f_L(\omega) \delta(\omega - \epsilon_{k\alpha})$$

$$G_{k\alpha, k\alpha}^{(0) >}(\omega) = -2\pi i (1 - f_L(\omega)) \delta(\omega - \epsilon_{k\alpha})$$

- $f_L(\omega)$ : Fermi-Verteilung des linken Leiters
- Alternative Herleitung: Landau-Lifschitz Band X, §92
- Jetzt muss nur noch eingesetzt werden, hier nur Kurzfassung

# Skizze des Rechenweges für $J_L$

$$J_L = \langle \hat{J}_L \rangle = e \left\langle \frac{d\hat{N}_L}{dt} \right\rangle = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\substack{k,n \\ \alpha \in L}} \left( V_{k\alpha,n} \langle \hat{c}_{k\alpha}^\dagger \hat{d}_n \rangle - V_{k\alpha,n}^* \langle \hat{d}_n^\dagger \hat{c}_{k\alpha} \rangle \right)$$

$$\stackrel{\text{Fourier}}{\text{Def.}} \frac{e}{\hbar} \sum_{\substack{k,n \\ \alpha \in L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ V_{k\alpha,n} G_{n,k\alpha}^<(\omega) - V_{k\alpha,n}^* G_{k\alpha,n}^<(\omega) \right]$$

$$\stackrel{\text{Dyson}}{=} \frac{e}{\hbar} \sum_{\substack{k,n,m \\ \alpha \in L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ V_{k\alpha,n} V_{k\alpha,m}^* \left[ G_{k\alpha,k\alpha}^{(0)<}(\omega) G_{n,m}^T(\omega) - G_{k\alpha,k\alpha}^{(0)\tilde{T}}(\omega) G_{n,m}^<(\omega) \right] \right. \\ \left. - V_{k\alpha,n}^* V_{k\alpha,m} \left[ G_{k\alpha,k\alpha}^{(0)T}(\omega) G_{m,n}^<(\omega) - G_{k\alpha,k\alpha}^{(0)<}(\omega) G_{m,n}^{\tilde{T}}(\omega) \right] \right]$$

$$\stackrel{m \leftrightarrow n}{=} \frac{e}{\hbar} \sum_{\substack{k,n,m \\ \alpha \in L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ V_{k\alpha,n} V_{k\alpha,m}^* \left[ G_{k\alpha,k\alpha}^{(0)<} (G_{n,m}^> + G_{n,m}^<) - (G_{k\alpha,k\alpha}^{(0)<} + G_{k\alpha,k\alpha}^{(0)>}) G_{n,m}^< \right] \right]$$

$$\stackrel{G^{(0)}}{=} \frac{ie}{\hbar} \sum_{\substack{k,n,m \\ \alpha \in L}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[ V_{k\alpha,n} V_{k\alpha,m}^* \left[ f_L(\omega) (G_{n,m}^>(\omega) + G_{n,m}^<(\omega)) - (2f_L(\omega) - 1) G_{n,m}^<(\omega) \right] \delta(\omega - \epsilon_{k\alpha}) \right]$$

$$= \frac{ie}{\hbar} \sum_{\substack{k,n,m \\ \alpha \in L}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[ V_{k\alpha,n} V_{k\alpha,m}^* \delta(\omega - \epsilon_{k,\alpha}) \left[ f_L(\omega) (G_{n,m}^R(\omega) - G_{n,m}^A(\omega)) + G_{n,m}^<(\omega) \right] \right]$$

$$\equiv \frac{ie}{\hbar} \sum_{\substack{n,m \\ \alpha \in L}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \rho_\alpha(\epsilon) \left[ V_{\alpha,n}(\epsilon) V_{\alpha,m}^*(\epsilon) \left[ f_L(\epsilon) (G_{n,m}^R(\epsilon) - G_{n,m}^A(\epsilon)) + G_{n,m}^<(\epsilon) \right] \right]$$

## Zwischenergebnis

$$J_L = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\substack{n,m \\ \alpha \in L}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \varrho_\alpha(\epsilon) V_{\alpha,n}(\epsilon) V_{\alpha,m}^*(\epsilon) [f_L(\epsilon) (G_{n,m}^R(\epsilon) - G_{n,m}^A) + G_{n,m}^<(\epsilon)]$$

$$\varrho_\alpha(\epsilon) \quad \text{Zustandsdichte im Leiter } \alpha$$

$$V_{\alpha,n}(\epsilon) = \begin{cases} V_{k\alpha,n} & \epsilon = \epsilon_{k\alpha} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Übergangs-Amplitude}$$

- Gesamtstrom  $J$  als Mittelwert  $J = \frac{1}{2}(J_L - J_R)$
- Verwende Matrixschreibweise für die Indices  $n,m$

# Ergebnis: Landauer-ähnliche Formel

$$J = \frac{ie}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \left( \text{tr} \{ [f_L \Gamma^L - f_R \Gamma^R] (G^R - G^A) \} + \text{tr} \{ (\Gamma^L - \Gamma^R) G^< \} \right)$$

wobei:

$f_L(\epsilon), f_R(\epsilon)$  Fermi-Verteilungen im linken/rechten Leiter  
 $G^R(\epsilon) - G^A(\epsilon)$  Maß für Zustandsdichte im Quantenpunkt  
 $G^<, G^R, G^A$  gehören zum Quantenpunkt, nicht zu den Leitern  
 $\Gamma^L, \Gamma^R$  neu definiert, beschreiben Kopplungsstärke nach links/rechts

$$\Gamma_{n,m}^L = 2\pi \sum_{\alpha \in L} \varrho_{\alpha}(\epsilon) V_{\alpha,n}(\epsilon) V_{\alpha,m}^*(\epsilon)$$

$$\Gamma_{n,m}^R = 2\pi \sum_{\alpha \in R} \varrho_{\alpha}(\epsilon) V_{\alpha,n}(\epsilon) V_{\alpha,m}^*(\epsilon)$$

Überlegungen:

- Vereinfachung:  $\Gamma^L = \alpha \Gamma^R$  oder  $\Gamma^L = \Gamma^R$
- Was passiert im Gleichgewicht?

# Anderson-Modell

$$\mathcal{H}_d = \epsilon_d (\hat{n}_{d\uparrow} + \hat{n}_{d\downarrow}) + U \hat{n}_{d\uparrow} \hat{n}_{d\downarrow}$$

(hiermit wird H zum sog. **Anderson-Hamiltonoperator**)

- Beschreibt einzelne magnetische Verunreinigung in Metall
- Auch für SET verwendbar
- Nur ein freier Platz! Summen über m,n nicht mehr nötig
- Summen über  $\alpha \rightarrow$  Summen über Spin up, down
- Energie gegeben durch #Teilchen
  - PLUS Energie U um Coulomb-Abstoßung zu überwinden

## Warum beschreibt das einen SET?

- Energie, um **N Teilchen** im Quantenpunkt (SET) zu haben:

$$E_N = \frac{Q_N^2}{2C} = \frac{N^2 e^2}{2C}$$

- Energie, um **N+1 Teilchen** im Quantenpunkt zu haben:

$$E_{N+1} = \frac{Q_{N+1}^2}{2C} = \frac{(N+1)^2 e^2}{2C}$$

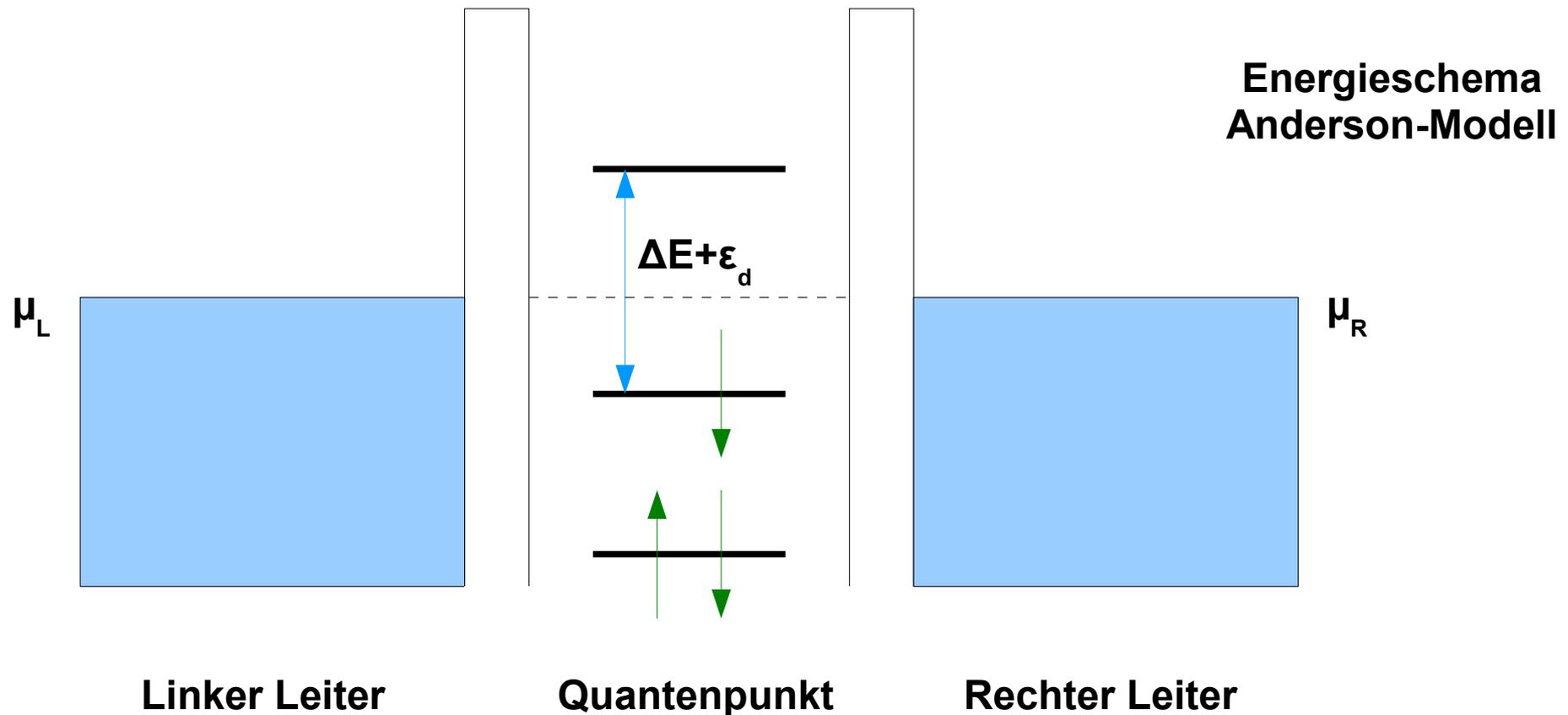
- Energiedifferenz:

$$\Delta E = \frac{(2N+1)e^2}{2C} \approx \frac{N}{C} e^2$$

- Makroskopisch!

## Betrachte nur zwei Niveaus

- Nur die nächsten Niveaus zur Fermi-Kante des Leiters relevant
  - Kann mit Anderson-Hamiltonoperator beschrieben werden!



# Leitwert-Quantisierung

- Anderson-Modell
- $\Gamma^L = \Gamma^R = \Gamma$

$$J = \frac{ie}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \left( \text{tr} \{ [f_L \Gamma^L - f_R \Gamma^R] (G^R - G^A) \} + \text{tr} \{ (\Gamma^L - \Gamma^R) G^< \} \right)$$

vereinfacht sich zu



$$J = \frac{ie}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon (f_L(\epsilon) - f_R(\epsilon)) \text{tr} \{ \Gamma (G^R - G^A) \}$$

## Untersuche $G^R$ - $G^A$ :

$$\operatorname{Re} G^R(\epsilon) = \operatorname{Re} G^A(\epsilon)$$

$$\operatorname{Im} G^R(\epsilon) = -\operatorname{Im} G^A(\epsilon)$$

$$\Rightarrow G^A(\epsilon) - G^R(\epsilon) = 2i \operatorname{Im} G^A(\epsilon)$$

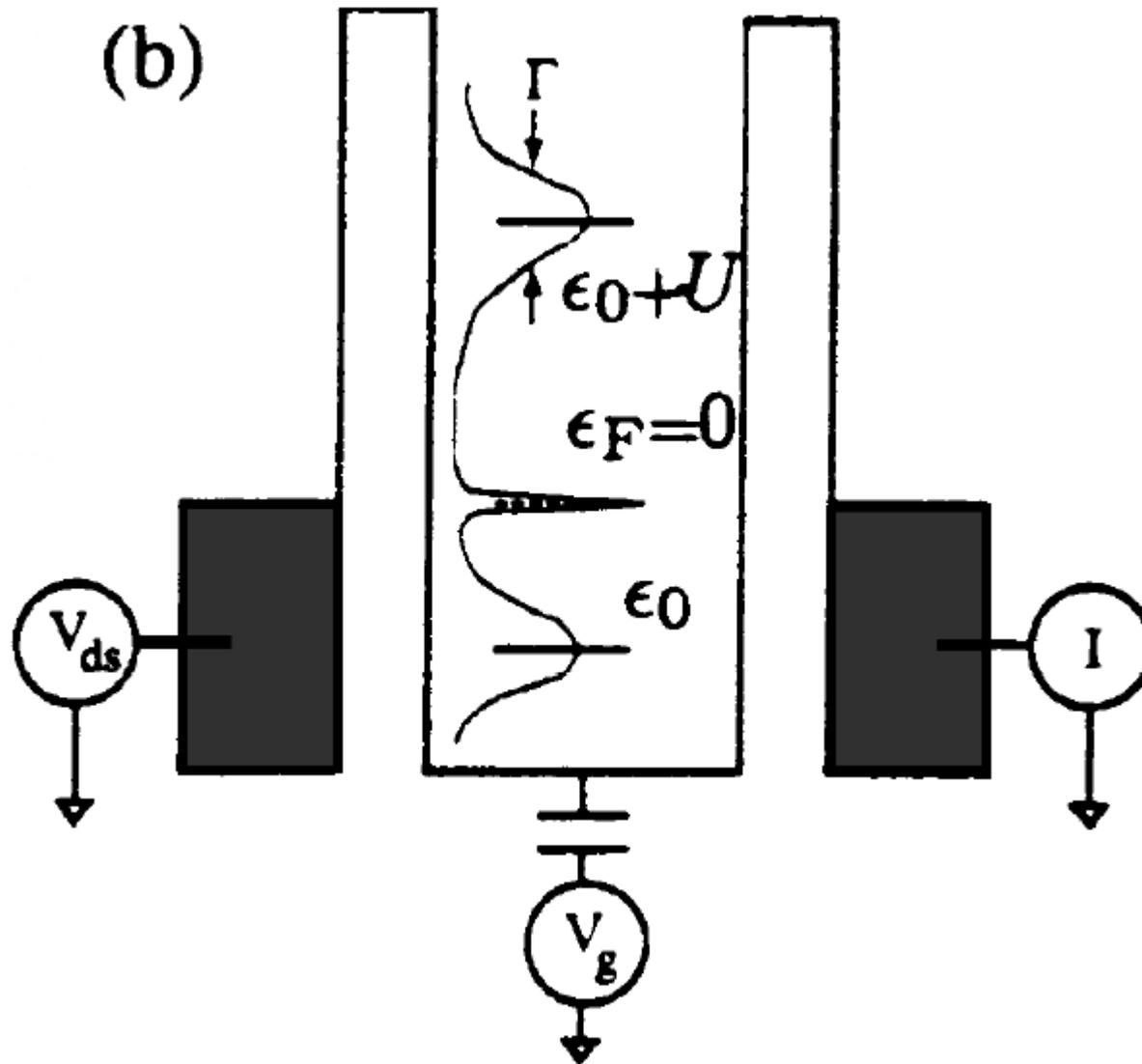
Verbreiterung durch  
endliche Lebensdauer,  
hängt von Kopplungs-  
stärke ab

$$G^A(\epsilon) = \sum_{\epsilon_{dot}} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_{dot} - i\eta + i\Gamma}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} G^A(\epsilon) = \sum_{\epsilon_{dot}} \left\{ \begin{array}{ll} \pi\delta(\epsilon - \epsilon_{dot}) & \Gamma = 0 \\ \frac{\Gamma}{(\epsilon - \epsilon_{dot})^2 + \Gamma^2} & \Gamma > 0 \end{array} \right\}$$

$$\epsilon_{dot} = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_d & \text{1-fach besetzt} \\ 2\epsilon_d + U & \text{2-fach besetzt} \end{array} \right\}$$

# Schematische Darstellung

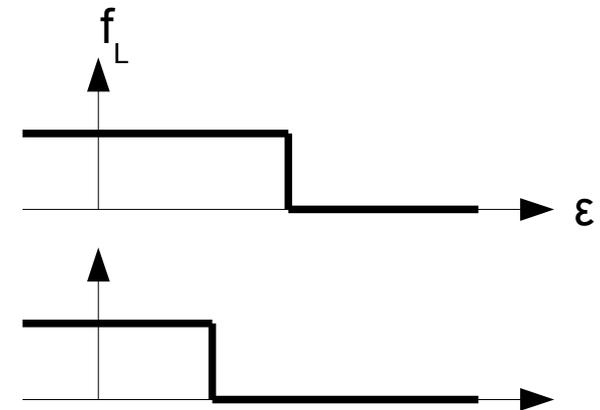


# Untersuche $f_L - f_R$ :

• Fermi-Verteilungen:  $f_{L,R}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu_{L,R})} + 1}$

• Betrachte  $T=0$ :  $f_L(\epsilon) \rightarrow \theta(\mu_L - \epsilon)$

$f_R(\epsilon) \rightarrow \theta(\mu_R - \epsilon)$



$$J = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon (\theta(\mu_L - \epsilon) - \theta(\mu_R - \epsilon)) \operatorname{tr} \{ \Gamma \operatorname{Im} G^A(\epsilon) \}$$

## Leitwert-Quantisierung

• Leitwert:  $g = \frac{dJ}{dV}$

• Spannung:  $V = \frac{1}{e}(\mu_L - \mu_R)$

$$\Rightarrow g = \frac{e}{2} \left( \frac{dJ}{d\mu_L} - \frac{dJ}{d\mu_R} \right)$$

$$\Rightarrow g = \frac{e^2}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon (\delta(\mu_L - \epsilon) + \delta(\mu_R - \epsilon)) \Gamma \operatorname{Im} G^A(\epsilon)$$

$$= \frac{e^2}{2h} \Gamma \operatorname{Im} (G^A(\mu_L) + G^A(\mu_R))$$

## Leitwert-Quantisierung (Fortsetzung)

• Für  $\mu_L = \mu_R$  ergibt sich:

$$g = \frac{e^2}{h} \Gamma \operatorname{Im} (G^A(\mu))$$

• An den Peaks gilt:

$$\operatorname{Im} (G^A(\mu = \epsilon_{dot})) = \frac{1}{\Gamma}$$

$$\Rightarrow g = \frac{e^2}{h}$$

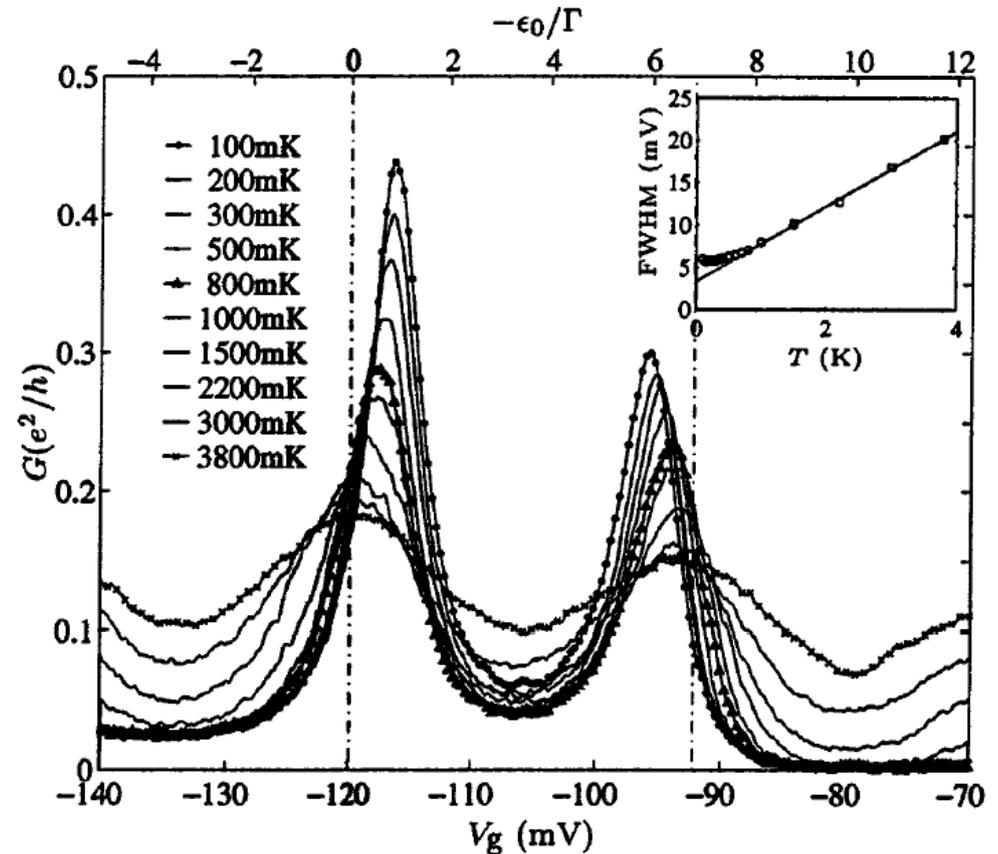
### Leitwert-Quantisierung

- für  $T=0$  und Symmetrie
- Leitung nur nahe der Peaks

Der maximale Leitwert ist unabhängig von der Kopplungsstärke.

# Ergebnis, Coulomb-Blockade

- Falls Leiterniveau und innere Niveaus nicht gleich, wird Leitung durch Coulomb-Abstoßung verhindert
- Aufweichung durch endliche Temperatur und Übergänge
- Experimentell werden innere Niveaus durch eine zusätzliche Gate-Spannung verschoben
- Periodische Wiederholung im Abstand  $\Delta E$
- Für noch tiefere Temperaturen: Kondo-Effekt – nächster Vortrag



---

# Quellen

- Y. Meir, N. Wingreen, Phys. Rev. Lett. **68**, 2512 (1992)
- D. Goldhaber-Gordon, J. Göres, M. A. Kastner, H. Shtrikman, D. Mahalu, U. Meirav, Phys. Rev. Lett. **81**, 5225 (1998)
- A.-P. Jauho, Nonequilibrium Green Function Modelling of Transport in Mesoscopic Systems (August 2002)
- L.D. Landau, E.M. Lifschitz – Lehrbuch der Theoretischen Physik X
- Nolting – Grundkurs Theoretische Physik 7