

Übungsblatt 1 (16.-17. April)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Comptonstreuung:

Ein Photon mit der Energie $E = 100keV$ wird an einem ruhenden Elektron um 90° gestreut. Wie verteilen sich die Energien nach dem Stoß? In welche Richtung bewegt sich das Elektron? Die Ruhemasse des Elektrons beträgt $m_e c^2 = 511keV$. (Hinweis: Viererimpulserhaltung).

1.2 Fouriertransformation:

Die Fouriertransformation (FT) einer Funktion $\phi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ ist gegeben durch:

$$FT \{ \phi \} (\vec{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^n x \phi(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (1)$$

- a) Zerlegen Sie die Funktion $\phi(x)$ in einen geraden ($\phi_e(x)$) und ungeraden ($\phi_o(x)$) Anteil. Berechnen Sie die Fouriertransformierte und geben Sie deren Real- und Imaginärteil an.
- b) Berechnen Sie die folgenden Fouriertransformationen:
- $f(x - a)$, a reell
 - $f(ax)$, a reell und $a \neq 0$
 - $f(-x)$
- c) Berechnen Sie zunächst die FT der Gaußfunktion:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad (2)$$

und anschliessend das Produkt $\Delta x \Delta k$ (Unschärferelation!) mit

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |g(x)|^2 dx \quad (3)$$

und

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |g(x)|^2 dx \quad (4)$$

1.3 Delta-Funktion:

Die δ -funktion ist definiert durch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (5)$$

Zeigen Sie:

- $x\delta(x) = 0$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
- $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x - a) + \delta(x + a))$

2 Hausaufgaben: Abgabe 22. April 2009 (30 Punkte)

2.1 De Broglie Wellenlänge (6 Punkte):

Eine wichtige Skala in der Quantenmechanik ist die de Broglie Wellenlänge. Wie Sie vermutlich bereits wissen ist diese gegeben durch: $\lambda = h/p$. Hier ist h das Plancksche Wirkungsquantum. Einige Konstanten um Ihnen die Rechnung zu erleichtern: $c = 3 * 10^8 m/s$, $h = 6.62606896 * 10^{-34} Js = 4.13566733 * 10^{-15} eVs$

- Wie haegt λ von der kinetischen Energie fuer den klassischen ($v \ll c$) und relativistischen ($v \approx c$) Grenzfall ab (2 Punkte)?
- Berechnen Sie die de Broglie Wellenlänge für einige Fälle (4 Punkte):
 - ein Elektron: $m_e c^2 = 511 keV$ mit $E = 15 eV$
 - ein Neutron: $m_n c^2 = 939 MeV$ mit $E = 10 MeV$
 - ein Homo Sapiens: $m = 80 kg$ mit $v = 3 km/h$

2.2 Fouriertransformation und Faltung (12 Punkte):

Die Faltung zweier Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 ist definiert als:

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \phi_1(x-y) \phi_2(y) \quad (6)$$

- a) Zeigen Sie, dass die FT ein Produkt in eine Faltung ueberführt, dass also gilt (4 Punkte):

$$\sqrt{2\pi} FT(\phi_1 \phi_2)(x) \equiv \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi_1(k) \phi_2(k) e^{ikx} = (\phi_1 * \phi_2)(x) \quad (7)$$

- b) Zeigen Sie, dass eine Ableitung in eine der beiden Faktoren gezogen werden kann, das also gilt (4 Punkte):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi_1 * \phi_2) \right] (\vec{x}) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \phi_1 \right) * \phi_2 \right] (\vec{x}) = \left[\phi_1 * \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \phi_2 \right) \right] (\vec{x}) \quad (8)$$

- c) Zeige, dass die Fouriertransformation Ableitungen in Multiplikationen abbildet (4 Punkte):

$$\left[\frac{\partial}{\partial k^j} (FT \phi) \right] (\vec{k}) = i [FT(x^j \phi)](\vec{k}) \quad (9)$$

sowie

$$\left[FT \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \phi \right) \right] (\vec{k}) = -i k^j [FT(\phi)](\vec{k}) \quad (10)$$

2.3 Hamilton/Lagrange-Formalismus (12 Punkte):

Verwenden Sie Lagrange- (6 Punkte) sowie Hamilton- (6 Punkte) Formalismus um die Bewegungsgleichungen für einen 2-dimensionalen harmonischen Oszillator herzuleiten, je einmal in kartesischen und einmal in Polarkoordinaten. Verwenden Sie Poisson Klammern um zu zeigen dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist. (Hinweis: Mechanik Vorlesung)