

## Übungsblatt 2 (23.-24. April)

### 1 Anwesenheitsübung:

#### 1.1 Eigenschaften hermitescher und unitärer Operatoren

Für einen linearen Operator  $\hat{A}$  sei der hermitesch adjungte Operator  $\hat{A}^\dagger$  definiert durch:  $\langle u|\hat{A}^\dagger|v\rangle = \langle v|\hat{A}|u\rangle^*$ . Ein Operator heisst hermitesch falls  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ , anti-hermitesch falls  $\hat{A} = -\hat{A}^\dagger$ , und unitär falls  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$  gilt. Weiter sei ein Kommutator als  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  definiert. Zeigen Sie:

- $(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger = \hat{B}^\dagger + \hat{A}^\dagger$
- $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$
- $(\lambda\hat{A})^\dagger = \lambda^*\hat{A}^\dagger$
- $(\hat{A}\hat{B}\dots\hat{Z})^\dagger = \hat{Z}^\dagger\dots\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$
- dass  $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger$  anti-hermitesch ist, wenn  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  hermitesch sind.
- für die Matrixelemente eines hermiteschen Operators gilt:  $a_{ij} = a_{ji}^*$
- ist  $\hat{A}$  hermitesch, so ist  $e^{i\hat{A}}$  unitär
- dass die Eigenwerte einer hermiteschen Abbildung reell und die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal sind.
- Zeigen Sie dass die Eigenwerte einer unitären Abbildung auf dem Einheitskreis liegen.
- Seinen  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  hermitesch und vertauschen, sowie  $\vec{a}$  Eigenvektor von  $\hat{A}$ . Zeige, dass  $\hat{B}\vec{a}$  Eigenvektor von  $\hat{A}$  ist.

#### 1.2 Zustand in Ortsdarstellung

Ein Zustand  $|\psi\rangle$  eines Teilchens wird in der Ortsdarstellung durch die Wellenfunktion

$$\langle x|\psi\rangle = \alpha e^{-\beta|x-x_0|+i\gamma x}, \beta > 0, \gamma > 0, x_0 > 0$$

beschrieben. Normieren Sie  $\langle x|\psi\rangle$  und skizzieren Sie  $|\langle x|\psi\rangle|^2$ . Geben Sie  $\langle x\rangle$  und die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen in den Intervallen a)  $(-\infty, 0]$ , b)  $[0, x_0]$  und c)  $(x_0, \infty)$  befindet an. Transformieren Sie  $|\psi\rangle$  in die Impulsdarstellung indem sie

$$\langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle \text{ mit } \langle p|x\rangle = e^{-i\frac{p}{\hbar}x}$$

berechnen. Berechnen Sie weiters  $\Delta x \Delta p$  für das Teilchen im Zustand  $|\psi\rangle$ .

## 2 Hausaufgaben: Abgabe 6. Mai 2009 (40 Punkte)

### 2.1 Delta-distribution (8 Punkte)

Zeigen Sie dass die beiden Funktionenfolgen

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \text{ und } g_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2}$$

für  $n \rightarrow \infty$  die definierenden Eigenschaften der  $\delta$ -Distribution erfüllen.

### 2.2 Skalarprodukt (12 Punkte)

Für  $\phi_1, \phi_2 \in S(\mathbb{R}^n)$  (Schwartz-Raum) sei ein Skalarprodukt definiert:

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int d^n x \phi_1^*(\vec{x}) \phi_2(\vec{x}).$$

- Zeige dass  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  ein hermitesches Skalarprodukt ist.
- Zeige dass der Operator  $i\vec{\nabla}$  bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  hermitesch ist.
- Zeige dass die Fouriertransformation bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  unitär ist. Also  $\langle F\phi_1 | \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 | F^{-1}\phi_2 \rangle$  sowie  $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \langle F\phi_1 | F\phi_2 \rangle$  gilt.
- Zeige dass die Erwartungswerte  $\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$  hermitescher Operatoren reell sind.
- Zeige dass die Streuung  $(\Delta A)^2 = \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle$  eines hermiteschen Operators  $A$  genau dann verschwindet, wenn  $\psi$  Eigenfunktion von  $A$  ist.
- Ein Operator  $\hat{A}$  der gleich seinem adjugierten Operator  $\hat{A}^\dagger$  ist, für den der Definitionsbereich der beiden Operatoren nicht übereinstimmt heisst selbstadjungiert. Zeigen Sie dass  $\hat{p}_r = \frac{1}{ir} \frac{\partial}{\partial r} r$  in  $\mathbb{R}^3$  selbstadjungiert ist.

### 2.3 Rechnen mit Operatoren (10 Punkte)

Gegeben ist der Hamiltonoperator sowie ein weiterer Operator:

$$\hat{H} = -\hbar\omega \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie  $[\hat{H}, \hat{\sigma}^x]$ .
- Geben Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der Operatoren an.
- Führen Sie die Zeitentwicklung der Eigenzustände des Hamiltonoperators an. Zur Zeit  $t = 0$  befindet sich das System in einem Zustand  $\psi(t = 0)$ , der Eigenzustand zum positiven Eigenwert von  $\sigma^x$  ist. Was ist der Zustand  $\psi(t)$  und Erwartungswert  $\langle \sigma^x \rangle$  für  $t > 0$ .

## 2.4 “Wahrscheinlichkeitserhaltung” (10 Punkte)

Die Normalisierungsbedingung  $\int d^3x \psi^* \psi = 1$  wird aufgefasst im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie ein Teilchen im Volumenelement  $d^3x$  zu finden. Dafür muss es ein Erhaltungsgesetz geben. Leite dieses her und interpretiere das Ergebnis klassisch. (Hinweis Kontinuitätsgleichung).