Übungsblatt 3 (7.-8. Mai)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Der harmonische Oszillator

Wie Sie bereits aus der Vorlesung wissen, lautet der Hamiltonoperator für den 1-dimensionalen harmonischen Oszillator mit einer Masse m und Oszillatorfrequenz ω:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödinger-Gleichung $\widehat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ mit $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $y = \frac{x}{b}$, $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$ und $\psi(x) = u(\frac{x}{b})$ die folgende dimensionslose Gestalt besitzt:
  $\frac{d^2u}{dy^2} + (\epsilon - y^2)u = 0$
  b ist damit die charakteristische Längenskala.

- Sei $\phi(\vec{r})$ Eigenfunktion eines Hamiltonoperators mit Eigenwert E. Zeige, dass $\phi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(\vec{r})$ die Schrödingergleichung löst. Welche Bedingung muss für $\phi(\vec{r})$ gelten damit eine quantenmechanische Interpretation möglich ist?

- Die Leiteroperatoren $\widehat{a}^\dagger$und $\widehat{a}$ sind definiert wie folgt:
  $\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\widehat{x}}{b} + \frac{ib}{\hbar}\widehat{p})$, $\widehat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\widehat{x}}{b} - \frac{ib}{\hbar}\widehat{p})$
  Zeigen Sie:
  $\widehat{H} = \hbar\omega(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \frac{1}{2})$

- Berechnen Sie:
  $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger]$, $[\widehat{H}, \widehat{a}^\dagger]$, $[\widehat{H}, \widehat{a}]$, $[\widehat{n}, \widehat{a}]$ sowie $[\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger]$ - mit $\widehat{n} = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}$ dem Besetzungszahloperator.

- Bestimmen Sie nun die normierte Lösung $\phi_0(x)$ der Gleichung $\widehat{a}\phi_0 = 0$. Was ist $\widehat{H}\phi_0$?

- Setze $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\widehat{a}^\dagger)^n\phi_0$ und berechne $\widehat{H}\phi_n$, $\int |\phi_n(x)|^2 dx$ und $\widehat{a}\phi_n$. $\widehat{a}^\dagger$ wird Aufsteigeoperator, $\widehat{a}$ Absteigeoperator genannt. Warum?

- Zeigen Sie nun dass die Energieeigenwerte positiv sein müssen und folgern Sie weiters dass es ausser den soeben konstruierten ϕ_n mit den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ keine weiteren Eigenfunktionen gibt.

2 Hausaufgaben: Abgabe 13. Mai 2009 (32 Punkte)

2.1 Wiederholung (8 Punkte)

- Überprüfen Sie, welche der folgenden Operatoren hermitesch sind: $\vec{\nabla}$, $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$, sowie$\vec{\nabla}^2$ (je 1 Punkt).
- Zeigen Sie: $[A+B,C] = [A,C]+[B,C]$, $[AB,C] = A[B,C]+[A,C]B$ und $[A[B,C]] + [B[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$ (je 1 Punkt).
- Zeigen Sie: wenn $[A,B] = c$ mit $c\epsilon\mathbb{C}$ dann gilt $[A^n,B] = cnA^{n-1}$ (2 Punkte).

2.2 Harmonischer Oszillator: Fortsetzung der Anwesenheitsübung (14 Punkte)

- Die Hermite-Polynome $H_k(y)$ sind durch folgende Entwicklung definiert:
  $e^{-z^2+2zy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} H_k(y)$ für $z\epsilon\mathbb{C}$, $y\epsilon\mathbb{R}$.
  Zeige:
  $H_k(y) = (-1)^k e^{y^2} \frac{d^k}{dy^k} e^{-y^2}$ sowie $H_k'(y) = 2yH_k(y) - H_{k+1}(y)$.
- Zeige nun:
  $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2b^2}x^2} H_n(\frac{x}{b})$.
- Zeige die Vollständigkeit der Hermite-Polynome durch Beweis der Aussage $\langle H_k|f\rangle = 0 \forall k \Rightarrow f = 0$. Betrachte dazu die Funktion: $F(z) = \int e^{-z^2+2zx} f^*(x)dx$ für $z\epsilon\mathbb{C}$.
- Skizzieren Sie den Grundzustand (ϕ_0), sowie die ersten beiden angeregeten Zustände ($\phi_1$und ϕ_2).
- Zeige, dass $\langle p\rangle$ und $\langle x\rangle$ in den Eigenzuständen verschwinden.
- Berechne Δx und Δp in einem Eigenzustand ϕ_n und zeige $\Delta x \Delta p = (n+\frac{1}{2})\hbar$.
- Was ist die kleinstmögliche Energie für $\langle p\rangle = \langle x\rangle = 0$?

2.3 Ebene Wellen (10 Punkte)

Man löse die eindimensionale zeitabhängige Schrödingergleichung für den Fall $V(x,t) = 0$. Die physikalische Relevanz der Lösungen soll diskutiert werden.