

Übungsblatt 4 (14.-15. Mai)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Symmetrisches Potential

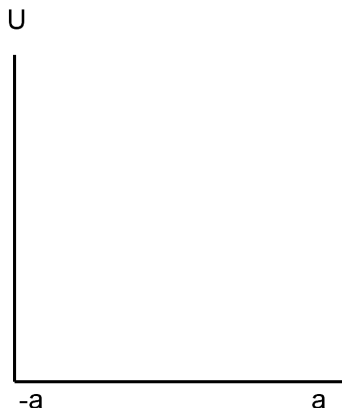
- 1.1. Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)$ mit einem spiegelsymmetrischen Potential $V(x) = V(-x)$ mit dem Paritätsoperator \hat{P} (definiert durch $\hat{P}f(x) = f(-x)$) kommutiert.
- 1.2. Zeigen Sie dass \hat{H} blockdiagonal ist, d. h. es gilt: $\hat{H} = \frac{1}{4}(1 + \hat{P})\hat{H}(1 + \hat{P}) + \frac{1}{4}(1 - \hat{P})\hat{H}(1 - \hat{P})$.
- 1.3. Seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ Lösungen der Schrödinger-Gleichung zum gleichen Eigenwert E : $-\frac{\hbar^2}{2m}u_i''(x) + (V(x) - E)u_i(x) = 0$. Die Wronski-Determinante ist definiert durch: $W(u_1, u_2; x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$. Zeigen Sie, dass $\partial_x W(u_1, u_2; x)$ verschwindet. Warum folgt daraus, dass auch W selbst verschwindet?
- 1.4. Benutzen Sie die letzte Eigenschaft um zu zeigen, dass $u_1(x) = Cu_2(x)$, $C = \text{const}$ gilt, d.h., es gibt in eindimensionalen quantenmechanischen Problemen keine Entartung.

1.2 Stehende Welle

Ein Teilchen sei in einem Schacht (siehe Bild):

$$V(x) = \begin{cases} U = \infty, & |x| > a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen. Hinweis: Beachten Sie die Rand- und Normalisierungsbedingungen.



2 Hausaufgaben: Abgabe DIENSTAG 19. Mai 2009 (26 Punkte)

ACHTUNG: Diesmal wurde die Abgabe einen Tag vorverlegt, da bedingt durch den Feiertag die Donnerstagsgruppen bereits am Mittwoch starten!!! Der Arbeitsumfang für die Hausaufgaben wurde diesmal daher reduziert (der nächste Übungszettel wird dafür allerdings etwas länger).

2.1 Harmonischer Oszillator: Kohärente Zustände (12 Punkte)

Betrachte die Eigenfunktionen ϕ_α des Vernichtungsoperators a mit Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$.

- 2.1. Drücke $\langle \phi_\alpha | \alpha_n \rangle$ durch $\langle \phi_\alpha | \phi_0 \rangle$ aus und gebe so die Entwicklung von ϕ_α nach den Eigenfunktionen ϕ_n an. Normiere die Summe und leite die Zeitentwicklung her:

$$\phi_\alpha(x, t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{-in\omega t}}{\sqrt{n!}} \phi_n(x) e^{-\frac{i\omega t}{2}}$$

Warum ist dieser kohärente Zustand eine Lösung der Schrödingergleichung?

- 2.2. Berechne den Orts-Erwartungswert von $\phi_\alpha(x, t)$ und interpretiere das Ergebnis.
2.3. Berechne auch die Streuung Δx .

2.2 Teilchen in Potential (14 Punkte)

Ein Teilchen sei in folgendem eindimensionalen Potential (siehe Illustration unten):

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > b \\ 0, & b > |x| > a \\ V_0, & a > |x| \end{cases}$$

- 2.1. Geben Sie die Rand- und Anschlussbedingungen an. Leiten Sie für $E < V_0$ Gleichungen ab, mit deren Hilfe Sie die Eigenwerte bestimmen können (Hinweis: Gerade und ungerade Zustände unterscheiden).
2.2. Skizzieren Sie die Lösungen dieser Gleichungen graphisch.
2.3. Diskutieren Sie $V_0 \rightarrow \infty$.

