Übungsblatt 5 (20. und 22. Mai)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Periodische Potentiale

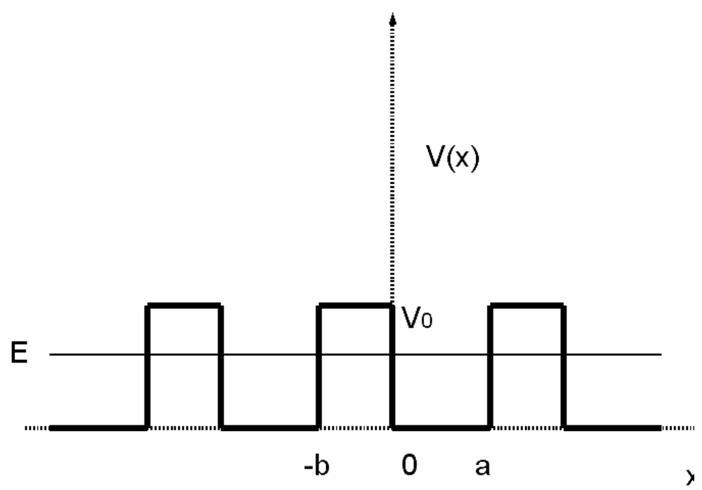
1.1. Man beweise, dass in einen periodischem Potential $V(x+a) = V(x)$ zu jeder Energie zwei Lösungen der Schrödingergleichung existieren, für die $u(x+a) = \lambda u(x)$ gilt.

1.2. Wie kann man ausgehend von zwei linear unabhängigen Partikularlösungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ der Schrödingergleichung im Intervall $0 \le x \le a$, für periodische Potentiale die zulässigen Energieniveaus finden?

1.3. Ein Potential $V(x)$ der Periodenlänge l=a+b sei (siehe Bild):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & nl \le x < nl + a \\ V_0 & nl - b < x \le nl \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Energiebänder und skizzieren Sie diese für $a = b$ und $\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} = 4$.



2 Hausaufgaben: Abgabe 27. Mai 2009 (40 Punkte)

2.1 Gaussches Wellenpaket (12 Punkte)

Betrachten Sie ein sich kräftefrei bewegendes Wellenpaket, dass einen Korpuskel beschreibt.

2.1. Zur Zeit $t = 0$ soll die Aufenthaltswahrscheinlichkeit so beschaffen sein, dass der Korpuskel nur in einer kleinen Umgebung der Stelle $\overrightarrow{r} = 0$ merklich von Null abweicht, zu dem Zeitpunkt soll er sich mit dem Impuls $\overrightarrow{p}_0 = \hbar \overrightarrow{k}_0$ bewegen. Zeigen Sie, dass dann $\Psi(\overrightarrow{r}, 0)$ die Form$\Psi(\overrightarrow{r}, 0) = Ae^{-\frac{r^2}{2a^2} + i\overrightarrow{k}_0\overrightarrow{r}}$ hat (Hinweis: Betrachten Sie Stromdichte und Dichte!).

2.2. Bestimme A.

2.3. Betrachten Sie nun die spezielle Lösung der Schrödingergleichung für ebene Wellen (Blatt 3): $\Psi(\overrightarrow{r}, t) = C(\overrightarrow{k})e^{i(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r} - \omega t)}$ mit $\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$. Die vollständige Lösung folgt nun durch Superposition aller $C(\overrightarrow{k})$. Schreiben Sie die vollständige Lösung für $\Psi(\overrightarrow{r}, 0)$ an, und berechnen Sie daraus $C(\overrightarrow{k})$. Vergleiche das Ergebnis mit 1, folgern Sie aus dem Ergebnis die Unschärferelation (zum Unterschied zu Blatt 3 rechnen wir diesmal in 3 Dimensionen!).

2.4. Bestimmen Sie nun $\Psi(\overrightarrow{r}, t)$.

2.5. Zum besseren Verständnis des Ergebnisses, bestimmen Sie die Dichte $\rho(\overrightarrow{r}, t)$ sowie die Stromdichte $s(\overrightarrow{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^* grad\Psi - \Psi grad\Psi^*)$ und interpretieren Sie das Resultat (vergleichen Sie mit $\rho(\overrightarrow{r}, 0)$).

2.2 Kamm von Dirac Funktionen (14 Punkte)

Gegeben sei ein periodisches Potential von äquidistanten Dirac Funktionen:
$V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x + na)$

2.1. Bestimmen Sie dafür die Energiebänder.

2.2. Skizzieren Sie die ersten drei Energiebänder als Funktion von E und ka.

2.3 MOS-FET (14 Punkte)

Ein Teilchen im dreidimensionalen Raum ist einem Potential ausgesetzt, das nur von der z-Koordinate abhängt:

$$V(z) = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ Fz, & F > 0, z \geqq 0 \end{cases}$$

Dies ist ein vereinfachtes Modell für die Grenzschicht zwischen verschiedenen Materialien wie z.b. GaAs in einem MOS-FET (inversion layer).

2.1. Machen Sie zur Lösung dieses Problems den Produktansatz $\psi(r) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$ und zeigen Sie, dass die dreidimensionale Schrödingergleichung sich auf drei eindimensionale Probleme reduzieren lässt.

2.2. Geben Sie die Lösungen für $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ an.

2.3. Welche semiklassische Quantisierungbedingung für die Eigenwerte von $\psi_3(z)$ liefert die WKB-Näherung in diesem Fall?

2.4. Geben Sie die ersten drei sich daraus ergebenden Eigenwerte an und skizzieren Sie die Wellenfunktion.