Übungsblatt 6 (28. und 29. Mai)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Drehimpuls

1.1. Der Drehimpuls ist gegeben durch: $L = x \times p = \frac{\hbar}{i} x \times \nabla$ bzw. $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$. Berechnen Sie $[L_i, L_j]$, $[L_i, x_j]$ sowie $[L_i, p_j]$.

1.2. Berechnen Sie L^2 sowie $[L^2, L_i]$.

1.3. Zeigen Sie: Wenn ein Operator mit zwei Komponenten des Drehimpulses vertauscht, dann verschwindet auch der Kommutator mit der dritten Komponente.

1.4. Sei (L_x, L_y, L_z) ein Satz von Drehimpulsoperatoren. Welche der nachfolgenden Kombinationen ist das ebenfalls:
$(-L_x, L_y, L_z)$, $(-L_x, -L_y, L_z)$, $(-L_x, -L_y, -L_z)$.

1.2 Spin

Gegeben seinen die Pauli-Matrizen:
$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Berechnen Sie:

1.1. σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2

1.2. $[\sigma_x, \sigma_y]$ und $\{\sigma_x, \sigma_y\}$

1.3. $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$, Sp σ_x, Sp σ_y, Sp σ_z, Det σ_x, Det σ_y, Det σ_z

1.4. zeigen Sie: $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$

2 Hausaufgaben: Abgabe DIENSTAG 9. Juni 2009 (36 Punkte)

ACHTUNG: Das Drop-In Center für diese Hausübung wird nächste Woche voraussichtlich am Mittwoch stattfinden. Bitte beachten Sie dazu die Hinweise auf unserer Webseite.

2.1 Potentialbarriere (14 Punkte)

Ein Teilchenstrom der Energie $0 < E < V_0$ trifft von $-\infty$ kommend gegen eine rechteckige Potentialbarriere:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| < a \\ 0 & sonst \end{cases}$$

2.1. Geben Sie die Schrödingergleichung und den Ansatz für die Wellenfunktion in den drei Bereichen an. Die einlaufende Welle habe hierbei die Amplitude 1.

2.2. Wie lauten die Anschlussbedinungen der Wellenfunktion?

2.3. Berechnen Sie den Durchgangskoeffizienten D und den Reflektionskoeffizienten R und überprüfen Sie die Beziehung $D + R = 1$

2.4. Zeigen Sie dass für $E << V_0$ folgendes gilt:
$D \approx (\frac{4k\mu}{k^2+\mu^2})^2 exp(-2S_0)$ mit
$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $\mu^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar}$ und $S_0 = \frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{a} dx\sqrt{2m(V(x)-E)}$

2.2 Drehimpuls (8 Punkte)

Es seien $a^\dagger$ und a ein Paar von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die der bekannten Beziehung $[a, a^\dagger] = 1$ und $[a, a] = 0$ genügen.

2.1. Zeigen Sie, dass dann die Operatoren:
$L^z = \hbar(l - a^\dagger a)$,
$L^+ = \hbar\sqrt{2l - a^\dagger a}a$
$L^- = \hbar a^\dagger\sqrt{2l - a^\dagger a}$
der Drehimpulsalgebra genügen.

2.2. Zeigen Sie: $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$

2.3 Isotroper Oszillator in drei Dimensionen (14 Punkte)

Der Hamiltonoperator lautet in diesem Fall: $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$

2.1. Benutze einen Seperationsansatz $\Psi(\overrightarrow{r}) = \Psi(x)\Psi(y)\Psi(y)$ für die stationären Lösungen um das Problem auf ein eindimensionales Problem zu reduzieren.

2.2. Bestimme zu gegebener Energie den Entartungsgrad.

2.3. Gib die Wellenfunktionen ϕ_0 für den Grundzustand und ϕ_i für den ersten angeregten Zustand explizit an.

2.4. Zeige, dass die Drehimpulsoperatoren L_i den Grundzustand ϕ_0 annihilieren.

2.5. Berechne die Wirkung der Drehimpulsoperatoren auf die Wellenfunktionen ϕ_i.

2.6. Zeige, dass die ϕ_i Eigenfunktionen von L^2 zum gleichen Eigenwert sind.

2.7. Konstruiere durch Linearkombination der ϕ_i Eigenfunktionen $\widetilde{\phi}_i$ von L_z.

2.8. Zeige, dass $L^{\pm} = L_x \pm iL_y$ jeweils eines der $\widetilde{\phi}_i$ annhiliert.

2.9. Zeige, dass $L^{\mp}$ angewandt auf das von $L^{\pm}$ annihilierte $\widetilde{\phi}_i$ die anderen $\widetilde{\phi}_j$ liefert.