

Übungsblatt 7 (10. und 12. Juni)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Austausch-Hamiltonian

Zwischen zwei Spin-1/2 Teilchen besteht eine Wechselwirkung die durch den Hamiltonian: $H = JS_1S_2$, mit $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma$ beschrieben wird.

- 1.1. Geben Sie die Matrixelemente von H an.
- 1.2. Bestimmen Sie seine Eigenwerte und Eigenfunktionen.
- 1.3. Berechnen Sie den Erwartungswert $(S_1 + S_2)^2$ für die Eigenzustände.

1.2 Drei Teilchen von Spin 1/2

Bestimmen Sie im 2^3 -dimensionalen Hilbert-Raum von drei Teilchen mit Spin 1/2 die Eigenvektoren.

1.3 N-Spins

Betrachten Sie jetzt ein System aus N spin-1/2 Teilchen (z.b. elektronen in einem Festkörper). Welche Werte kann der Gesamtspin $(\sum_{i=1}^N \vec{s}_i)$ annehmen und wieviele verschiedene Multipletts existieren zu festem Gesamtspin?

2 Hausaufgaben: Abgabe 17. Juni 2009 (32 Punkte)

2.1 Anschlussbedingungen (8 Punkte)

Leiten Sie die Anschlussbedingung für die Ableitung des Eigenzustandes $\partial_x \Psi(x)$ für die beiden folgenden Arten von diskontinuierlichen Potentialen her:

2.1. $V(x) = V_0 \Theta(x)$ (was passiert wenn $V_0 = \infty$?)

2.2. $V(x) = \frac{\hbar^2 \lambda}{2m} \delta(x)$

Hinweis: Schreiben Sie $\Psi'(+\epsilon) - \Psi'(-\epsilon)$ in ein Integral über die Diskontinuität um, und werten Sie dieses mit Hilfe der Schrödingergleichung aus.

2.2 Explizite Addition von Drehimpulsen (14 Punkte)

Betrachtet man die Drehimpulse zweier Teilchen, so gibt es zwei vollständige Sätze kommutierender Drehimpulsoperatoren: $(J^{(1)})^2, J_3^{(1)}, (J^{(2)})^2, J_3^{(2)}$ mit der Eigenfunktionsbasis $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ sowie $(J^{(1)})^2, (J^{(2)})^2, J^2, J_3$ mit der Eigenfunktionsbasis $|j_1 j_2 j m\rangle$, wobei $J = J^{(1)} \otimes 1 + 1 \otimes J^{(2)}$ der Gesamtdrehimpuls ist. Die gegenseitigen Entwicklungs- oder Clebsch/Gordan-Koeffizienten der beiden Basen sind Skalarprodukte der Form $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle$.

2.1. Zeigen Sie, dass die Skalarprodukte nur für $m = m_1 + m_2$ nicht verschwinden.

2.2. Warum ist $j_1 + j_2$ das maximale j ? Zeigen Sie durch Abzählen der Zustände, dass $j \geq |j_1 - j_2|$ ist. Welche möglichen Werte hat die Gesamtdrehimpulsquantenzahl j ?

Man kann verlangen, dass bei maximalem m und m_1 der Koeffizient nicht negativ ist: $\langle j_1 j_1 j_2 (j - j_1) | j_1 j_2 j j \rangle \geq 0$.

2.3. Zeigen Sie, dass die Zustände mit maximalem j und m einfach gegeben sind durch $|j_1 j_2 j = j_1 + j_2, m = \pm j\rangle = |j_1 \pm j_1\rangle \otimes |j_2 \pm j_2\rangle$ d. h. der Koeffizient ist gleich 1.

Betrachte speziell die Addition zweier Drehimpulse mit Quantenzahlen $j_1 = j_2 = 1$.

2.4. Gehen Sie vom in 3. konstruierten Zustand mit $j = m = 2$ aus, und berechnen Sie die anderen Zustände mit $j = 2$ durch die Wirkung der Leiteroperatoren.

2.5. Finden Sie den Zustand mit $j = m = 1$, indem ein Zustand mit $m = 1$ konstruiert wird, der zum Zustand mit $j = 2, m = 1$ orthogonal ist. Verifizieren Sie, dass dieser Zustand tatsächlich den Gesamtdrehimpuls $j = 1$ hat.

2.6. Gehen Sie von in 5. konstruierten Zustand mit $j = m = 1$ aus, und berechnen Sie die anderen Zustände mit $j = 1$ durch die Wirkung der Leiteroperatoren.

2.7. Finden Sie den Zustand mit $j = m = 0$, indem ein Zustand mit $m = 0$ konstruiert wird, der zu den Zuständen mit $j = 2, m = 0$ und $j = 1, m = 0$ orthogonal ist. Verifizieren Sie dass dieser Zustand tatsächlich den Gesamtdrehimpuls $j = 0$ hat.

2.3 Spin-1/2 Teilchen im Magnetfeld (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin-1/2 in einem äusseren Magnetfeld \vec{B} . Der spinabhängige Anteil des Hamiltonoperators lautet:

$$H_{mag} = -g\mu\vec{B}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

Zur Zeit $t=0$ befindet sich das Teilchen im Spinzustand $\chi_S(t = 0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\chi(t)$ und den Erwartungswert des Spin \vec{S} für beliebige Zeit t .