Übungsblatt 8 (18. und 19. Juni)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Teilchen mit Spin 1

Betrachten Sie nun ein Teilchen mit Spin 1.

1.1. Konstruieren Sie die Matrixdarstellungen der Operatoren S_x, S_y und S_z in der Basis $|1m\rangle$ von S^2, S_z Eigenzuständen

1.2. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Operators $\overrightarrow{n}\overrightarrow{S}$, wobei $\vec{n}$ einen Einheitsvektor in beliebiger Richtung darstellt also: $\vec{n} = cos\phi sin\Theta\vec{e}_x + sin\phi sin\Theta\vec{e}_y + cos\Theta\vec{e}_z$.

2 Hausaufgaben: Abgabe 24. Juni 2009 (30 Punkte)

2.1 Gesamtdrehimpuls für elektron (10 Punkte)

Berechnen Sie für ein Elektron mit Bahndrehimpuls $L = 1$ die Zustände zum Gesamtdrehimpuls $J = L + S$, d. h. geben Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle m_L m_S | J m_J \rangle$an.

2.2 1-d Kette von N-Spins (12 Punkte)

Der Hamiltonoperator einer 1-d Kette von N Spins (Gitterabstand a) mit Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn ist:
$H = -J \sum_{n=1}^{N} \overrightarrow{S}_n \overrightarrow{S}_{n+1}$, $\overrightarrow{S}_{N+1} = \overrightarrow{S}_1$ und $J > 0$
mit $S^{\pm}|m_S\rangle = \hbar\sqrt{S(S+1) - m_S(m_S \pm 1)}|m_S \pm\rangle$

2.1. Man zeige, dass $S^Z = \sum_{n=1}^{N} S_n^Z$ mit H vertauscht. Was folgt daraus?

Im Grundzustand $|0\rangle$ seien die Spins so ausgerichtet, dass deren z-Komponenten den Maximalwert $\hbar S$ haben:
$|0\rangle = \prod_{n=1}^{N} |S, m_S = S\rangle_n$ wobei $|S, m_S\rangle$ die Eigenzustände zu $\overrightarrow{S}_n^2$ und S_n^Z sind.

2.2. Was ergibt die Anwendung von H auf $|0\rangle$ für die Grundzustandsenergie E_0 ?

2.3. Man betrachte den Zustand $|m\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2S}} S_m^- |0\rangle$, in dem der m-te Spin um Eins erniedrigt ist, und zeige:
$H|m\rangle = E_0|m\rangle + J\hbar^2 S(2|m\rangle - |m-1\rangle - |m+1\rangle)$

2.4. Die Linearkombinationen $|k\rangle = \sum_{m=1}^{N} e^{ikma}|m\rangle$ von $|m\rangle$ (Spinwellenzustände) sind schliesslich Eigenzustände von H. Bestimmen Sie E_k und $S^Z|k\rangle$

Hinweis: Man drücke H durch S^Zund $S^{\pm}$ aus!

2.3 Nicht wechselwirkende Teilchen (8 Punkte)

N untereinander nicht wechselwirkende Teilchen bewegen sich in einem äusseren Potential $V(\vec{r})$.

2.1. Zeigen Sie, dass sich die N-Teilchen Schrödingergleichung
$\sum_{i=1}^{N} (\frac{p_i^2}{2m_i} + V(\vec{r}))\Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) = E\Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)$
auf N 1-Teilchen Schrödingergleichungen zurückführen lässt.

2.2. Die N-Teilchen seien identisch. Wie lautet die normierte Gesamtwellenfunktion für Bosonen und wie für Fermionen?

2.3. Was lässt sich über die Grundzustandsenergien der beiden Fälle aussagen?