Übungsblatt 9 (25. und 26. Juni)

1 Anwesenheitsübung:

1.1 Elektronen in Würfel

Betrachten Sie N nicht miteinander wechselwirkende Elektronen in einem Würfel der Dimensionen LxLxL.

1.1. Zeigen Sie das man für die Randbedingungen, periodische Randbedinungen erhält, das also: $\Psi(x, y, z) = \Psi(x + L, y, z) = \Psi(x, y + L, z) = \Psi(x, y, z + L)$ für die Lösung gilt.

1.2. Bestimmen Sie die Eigenenergie.

1.3. Bestimme Sie die Fermi-energie der N Elektronen.

1.4. Berechne Sie die Gesamtenergie des Grundzustandes des Gesamtsystems von N Teilchen.

1.2 Bosonen und Fermionen

Veranschaulichen Sie welche der folgenden Atome Fermionen und welche Bosonen sind: H, He3, He4.

1.3 Elektronen auf Kugeloberfläche

Auf einer Kugeloberfläche (Radius R) befinden sich mehrere nicht wechselwirkende Fermionen (Masse m) mit Spin $\frac{1}{2}$. Wieviele Teilchen enthält das System maximal bei einem Zustand der Energie $36\frac{\hbar^2}{2mR^2}$?

2 Hausaufgaben: Abgabe 1. Juli 2009 (30 Punkte)

2.1 Wasserstoffatom (10 Punkte)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator des H-Atoms:
$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$
Zeige das dieser mit dem quantenmechanischen Pendant des Runge-Lenz Vektors:
$\vec{R} = \frac{\hbar}{2m}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{e^2}{r}\vec{r}$
vertauscht.
Was bedeutet dass für das Spektrum von H?

2.2 Störungstheorie (10 punkte)

Ein eindimensionales Problem werde durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben:
$H = H_0 + \lambda H_1$, $H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, $H_1 = \sqrt{2\hbar m\omega^3}x$

2.1. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von H an.

2.2. Berechnen Sie mit Hilfe der Störungstheorie um H_0 die Eigenwerte bis zur Ordnung λ^2 und die Wellenfunktionen bis zur Ordnung λ. Zeigen Sie, dass die Ergebnisse der Störungstheorie mit der Entwicklung der exakten Lösung nach λ übereinstimmen.

Hinweis: Gehen Sie in die Darstellung für Erzeuger und Vernichteroperatoren über!

2.3 Entartungsdruck und Kollaps eines Sternes (10 Punkte)

Das Pauli-Verbot führt in weiterer Folge zum Entartungsdruck der einer Kompression eines Fermionengases entgegenwirkt. Dieser ist gegeben durch: $p_{deg} = -\frac{\partial E_{gesamt}}{\partial V}$ wobei E_{gesamt}die im letzten Abschnitt der ersten Anwesenheitsübung hergeleitete Beziehung für die Gesamtenergie ist: $E_{gesamt} = \frac{\hbar^2\pi^3}{10m}(\frac{3n}{\pi})^{\frac{5}{3}}L^3$. Nachdem ein Stern ausbrennt - also die Nuklearreaktionen stoppen - wirkt dieser Druck dem Kollaps (infolge der Gravitation) entgegen (hier wird angenommen das andere Einflüsse keine Rolle spielen). Bestimmen Sie durch gleichsetzten von Gravitationsdruck der Atomkerne und Entartungsdruck der Elektronen den Radius eines solchen Sterns in Abhängigkeit der Nukleonenzahl N.