Übungsblatt Extra

Die folgenden Übungsaufgaben sind für jene gedacht, die unser Punktekriterium knapp verfehlten. Punkte die Sie hier erreichen werden Ihnen auf Ihre Momentanpunktezahl aufgerechnet, ohne die Berechnungbasis (Gesamtpunktezahl die als 100 % betrachtet wird) zu ändern. Es 'dürfen' natürlich auch andere Studenten die Übungen rechnen. Korrigiert werden die Aufgaben aber nur für jene Studenten die die Punkte wirklich benötigen.

1 Extra-Hausaufgaben Teil 1: Abgabe in der letzten Übungsstunde (12 Punkte)

1.1 Quantenmechanischer Rotor im elektr. (12 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines starren Rotors mit Trägheitsmoment I lautet $H_0 = \frac{1}{2I}\vec{L}^2$.

1.1. Wie lauten Eigenwerte und Eigenfunktionen von H_0 ?

1.2. Der Rotor sei geladen und befinde sich in einem elektrischen Feld, was zu einem Zusatzpotential $H' = \frac{az}{r}$ führe. Zeige, welche Matrixelemente von H' nicht verschwinden. In welcher Ordnung Störungstheorie werden die Energien korrigiert?

1.3. Der Rotor befinde sich in einem anderen elektrischen Feld, das Zusatzpotential lautet nun $H' = b\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2}$. Die Störungstheorie soll einfacherweise auf die beiden untersten Energieniveaus beschränkt werden. Zeige, welche Matrixelemente von H' zwischen Eigenzuständen aus diesen Energieniveaus nicht verschwinden.

1.4. Bestimme in (3) die relative Energieaufspaltung durch H', die störungstheoretisch in erster Ordnung zu erwarten ist. Wie ändern sich die Wellenfunktionen?

Hinweise: $Y_{10}(\vartheta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos\vartheta$, $Y_{20}(\vartheta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}(\frac{3}{2}cos^2\vartheta - \frac{1}{2})$.

2 Extra-Hausaufgaben Teil 2: Abgabe DIENSTAG 14. Juli 2009 direkt an Ihren Tutor (24 Punkte)

2.1 Pauli-Matrizen (12 Punkte)

2.1. Zeigen Sie:
$(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B})$
wobei $\vec{A}$ und $\vec{B}$ operatoren sind, die mit $\vec{\sigma}$ vertauschen.

2.2. Zeigen Sie:
$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)^2 = 3 - 2(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)$

2.3. Verwenden Sie 2. um zu zeigen, dass
$\prod_0 = \frac{1}{4}(1 - \vec{\sigma}_1\vec{\sigma_2})$ und $\prod_1 = \frac{1}{4}(3 + \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)$
zwei zueinander orthogonale Projektionsoperatoren sind. Auf welche der Zweiteilchenspinzustände $|00\rangle, |1-1\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ projizieren also die Operatoren $\prod_0$ und $\prod_1$?
Hinweis: Drücken Sie $\prod_0$ und $\prod_1$ durch $\vec{S}^2 = \frac{1}{4}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)^2$ aus!

2.4. Zeigen Sie, dass
$\prod_{l+1/2} = \frac{l+1+\vec{L}\vec{\sigma}}{2l+1}$ und $\prod_{l-1/2} = \frac{l-\vec{L}\vec{\sigma}}{2l+1}$
die analogen Projektionsoperatoren für $j_1 = l$ und $j_2 = \frac{1}{2}$ sind.

2.2 Spin-Bahn-Kopplung (12 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines H-Atoms unter Berücksichtigung des relativistischen Effektes der Spin-Bahn-Kopplung lautet:
$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) + V_{L,S}(r)\vec{L}\vec{S}$

2.1. Zeigen Sie, dass H drehinvariant ist! Gilt auch $[H, \vec{L}] = [H, \vec{S}] = 0$?

2.2. Ist H spiegelungsinvariant?

2.3. Was ist der maximale Satz kommutierender Observablen für H?

2.4. Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung sich auf die Form
$(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{r^2} + V_{J,L})\psi = E\psi$
bringen lässt mit $V_{J,L}(r) = V(r) + V_{L,S}(r)\Lambda(J,L)$ wobei $\Lambda(J,L) = \begin{cases} L/2 \\ -(L+1)/2 \end{cases}$