Probeklausur

Diese Probeklausur soll Ihnen einen Eindruck vermitteln, wie die Klausur aussehen könnte. Versuchen Sie diese zu Hause ohne Zuhilfenahme von Büchern zu lösen, und überprüfen Sie wie viel Sie in 3 Stunden schaffen. In der letzten Übungsstunde können Beispiele daraus die Schwierigkeiten gemacht haben, besprochen werden. Bei der Klausur müssen Sie 50 % der Punkte erreichen um zu bestehen, hier wären das 90 Punkte.

1 Fragen zur Quantenmechanik (10+2+6+4+4+7+4+4=41 Punkte)

1.1. Geben Sie Wahrscheinlichkeits- und Stromdichte für eine Wellenfunktion an. Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung gilt und folgern Sie, dass die Wahrscheinlichkeit erhalten ist.

1.2. Ist es möglich, dass sich zwei Elektronen in einem Zustand mit Ortswellenfunktion $\psi(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}) = A\exp(-\frac{1}{b^2}(|\vec{r}^{(1)}|^2 + |\vec{r}^{(2)}|^2))$ befinden? Begründen Sie die Anwort.

1.3. Wie lauten die Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms? Wie hoch ist die Energieentartung? Welche Form haben die Eigenfunktionen? Skizzieren Sie die Radialwellenfunktionen zu den Zuständen in der ersten und zweiten Hauptschale.

1.4. Eine Wellenfunktion sei reell, zeigen Sie dass der Impulserwartungswert verschwindet.

1.5. Zeigen Sie: Vertrauscht ein Operator mit zwei Komponenten des Bahndrehimpulses $\vec{L}$, so kommutiert er auch mit der dritten Komponente. Gilt dies auch für den Spin?

1.6. Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewege sich im Magnetfeld $\vec{B}$ mit Vektorpotential $\vec{A}$ bzw $\vec{A}'$. Zeigen Sie wie die Wellenfunktionen der Schrödingergleichung mit $\vec{A}$ umtransformiert werden müssen, damit sie in solche zu $\vec{A}'$ übergehen.

1.7. Zeigen Sie: wenn $[A, B] = c$ mit $c\epsilon\mathbb{C}$ dann gilt $[A^n, B] = cnA^{n-1}$.

1.8. Zeigen Sie: ist $\widehat{A}$ hermitesch, so ist $e^{i\widehat{A}}$ unitär.

2 Harmonischer Oszillator (6+8+8=22 Punkte)

2.1. Wie lauten die Energieeigenwerte des eindimensionalen harmonischen Oszillators? Welche Form und Parität haben die Eigenfunktionen? Skizzieren Sie die Wellenfunktion der niedrigesten 3 Zustände.

2.2. Verifizieren Sie für die Erwartungswerte der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V in den Energieeigenzuständen $|n\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators das Virialtheorem, d.h. zeigen Sie $\langle n|T|n\rangle = \langle n|V|n\rangle$.

2.3. Ein Teilchen befindet sich im Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen ausserhalb des klassisch erlaubten Bereichs anzustreffen. Diskutiere das Ergebnis

3 Delta-Potential (6+10=16 Punkte)

Wir suchen die gebundenen Zustände für das eindimensionale Potential $V(x) = -\frac{\lambda\hbar^2}{2m}\delta(x)$.

3.1. Wie lauten die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktionen?

3.2. Leiten Sie mit Hilfe von (1) eine Bestimmungsgleichung für die Energie her und lösen Sie sie.

4 Squeezed States (5+8+5=18 Punkte)

4.1. Zeige $(e^{\alpha x \frac{\partial}{\partial x}} f)(x) = f(e^{\alpha} x)$. Leite zum Beweis beide Seite nach α ab.

4.2. Betrachten Sie für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator den normierten Zustand $|\psi_\alpha\rangle = C_\alpha e^{\frac{\alpha}{2}((a^\dagger)^2 - a^2 - 1)}|\phi\rangle$, wobei $\langle\phi|\phi\rangle = 1$. Verwende (1) um die explizite Darstellung von a und $a^\dagger$ im Ortsraum, um $\psi_\alpha(x)$ durch $\phi(x')$ auszudrücken, genauer, finde den Zusammenhang $x'(x)$. Warum heisst $|\psi_\alpha\rangle$ "gequetscht"?

4.3. Zeigen Sie, dass $S := e^{z(a^\dagger)^2 - z^* a^2}$ für $z\epsilon\mathbb{C}$ unitär ist. Was gilt daher für C_α?
Hinweis: $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$

5 Kramers Entartung (3+8+4+7=22 Punkte)

Betrachten Sie für ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen den Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V(\vec{r}) + W(\vec{r})\vec{L}\vec{S}$.

5.1. Zeigen Sie, dass in der Standarddarstellung der Paulimatrizen $\sigma_k^* = -\sigma_2\sigma_k\sigma_2$ gilt, mit k als index.

5.2. Zeigen Sie: $\psi'(t) = \sigma_2\psi^*(-t)$ löst die Schrödingergleichung, wenn $\psi(t)$ eine Lösung ist.

5.3. Zeigen Sie, dass für die Abbildung $\psi \mapsto \psi'$ $\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle$ gilt.

5.4. Sei ψ_E Lösung der stationären Schrödingergleichung zur Energie E. Zeigen Sie, dass $\psi_E' = \sigma_2\psi_E^*$ Lösung zur gleichen Energie ist und dass $\langle\psi_E|\psi_E'\rangle = 0$ gilt.

6 Quantenmechanischer Rotor im elektr. Feld (2+6+7+9=24 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines starren Rotors mit Trägheitsmoment I lautet $H_0 = \frac{1}{2I}\vec{L}^2$. Beachten Sie: $Y_{10}(\vartheta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\vartheta$, $Y_{20}(\vartheta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}(\frac{3}{2}cos^2\vartheta - \frac{1}{2})$.

6.1. Wie lauten Eigenwerte und Eigenfunktionen von H_0 ?

6.2. Der Rotor sei geladen und befinde sich in einem elektrischen Feld, was zu einem Zusatzpotential $H' = \frac{az}{r}$ führe. Zeigen Sie, welche Matrixelemente von H' nicht verschwinden. In welcher Ordnung Störungstheorie werden die Energien korrigiert?

6.3. Der Rotor befinde sich in einem anderen elektrischen Feld, das Zusatzpotential lautet nun $H' = b\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2}$. Die Störungstheorie soll einfacherweise auf die beiden untersten Energieniveaus beschränkt werden. Zeigen Sie, welche Matrixelemente von H' zwischen Eigenzuständen aus diesen Energieniveaus nicht verschwinden.

6.4. Bestimmen Sie in (3) die relative Energieaufspaltung durch H', die störungstheoretisch in erster Ordnung zu erwarten ist. Wie ändern sich die Wellenfunktionen?

7 Clebsch/Gordan-Koeffizienten (16 Punkte)

Führen Sie die Drehimpulsaddition für $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ explizit durch, indem ausgehend von den Zuständen $|\frac{1}{2}, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle$ die Wirkung der Leiteroperatoren verwendet wird.

8 Zwei Niveau-System (5+10+4+2=21 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e_z}$.

8.1. Welcher Hamiltonoperator beschreibt die zeitliche Entwicklung dieses Spins im Magnetfeld? Es soll nur die Wechselwirkung mit dem Magnetfeld betrachtet werden, d.h. die kinetische Energie des Teilchens wird vernachlässigt. Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator explizit.

8.2. Als Quantisierungsachse wählen wir die z-Achse. Drücken Sie die Eigenzustände der Spinoperatoren S_x und S_y durch die Eigenzustände des Spinoperators S_z aus.

8.3. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System in einem Eigenzustand $|\chi\rangle$ von S_x. Geben Sie $|\chi(t)\rangle$ mit Hilfe von (1) und (2) an. Interpretiere Sie das Ergebnis physikalisch.

8.4. Was ändert sich, wenn man statt des Spins einen Bahndrehimpuls betrachtet?